TECNICHE DI CONTROLLO

Stima Ottima dello Stato
Predittore/Filtro di Kalman

Presenter: Dott. Ing. SILVIO SIMANI

con supporto di
Dott. Ing. MARCELLO BONFE'

Contenuti del Corso

1. Controllo Ottimo per sistemi multivariabili
2. **Stima Ottima per sistemi multivariabili – Filtro di Kalman**
3. Metodi di Controllo Nonlineare ed applicazioni
4. Reti Neurali per identificazione e controllo
5. Logica Fuzzy per identificazione e controllo
6. Sperimentazione delle metodologie di progetto con simulazioni ed esercizi di approfondimento

Organizzazione delle Lezioni

1. Introduzione e richiami di teoria dei sistemi (Simani)
2. **Stima e Controllo Ottimo (Simani/Bonfè)**
3. Tecniche analitiche per il controllo nonlineare (Bonfè)
4. Reti Neurali (Simani)
5. Logica Fuzzy (Simani/Mainardi)
6. Esercitazioni in laboratorio con Matlab/Simulink (Bonfè/Simani)

Ringraziamenti

- Queste dispense sono state preparate utilizzando il materiale (testo e figure) del Prof. Thomas Parisini, dell'Università di Trieste - Dipartimento di Elettrotecnica, Elettronica e Informatica
- Home page: `http://control.units.it/parisini/`

Stima dello Stato

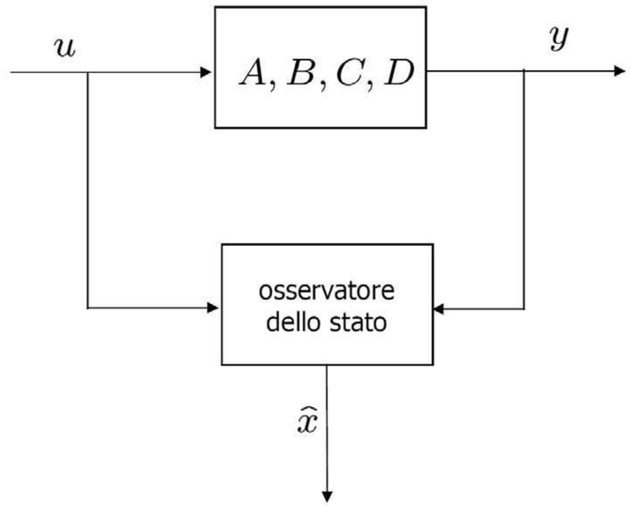
Quanto visto finora sulla retroazione dello stato assume che ciascuna componente dello stato del sistema sia nota in ciascun istante di tempo. In numerosi casi, tuttavia, lo stato del sistema non è interamente accessibile per varie ragioni:

1. Alcune variabili di stato possono non essere misurabili (ad esempio la temperatura in una parte non accessibile di un motore a reazione);
2. il sensore che servirebbe per la misura è troppo costoso;
3. l'ambiente è troppo rumoroso, sicché ogni eventuale misura sarebbe inservibile perché affetta da errore troppo grande;
4. …

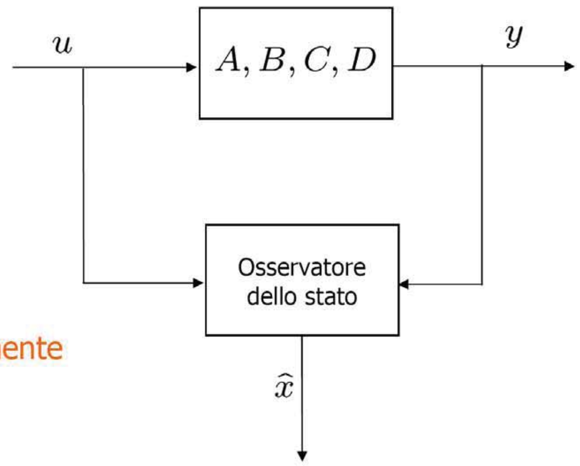
Allora **si rende necessario *stimare* lo stato del sistema** sulla base delle informazioni disponibili (tipicamente ingressi e uscite in un certo intervallo di tempo)

L'Osservatore

Il dispositivo che, sulla base della conoscenza di ingresso u e uscita y in un certo intervallo di tempo, fornisce una stima $\hat{x}$ dello stato x del sistema prende il nome di *osservatore dello stato*.



L’Osservatore di Luenberger



Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

un particolare osservatore, detto *osservatore di Luenberger* è quello così definito:

matrice opportunamente scelta

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = A\,\widehat{x} + B\,u + L(y - \widehat{y}) \\ \widehat{y} = C\,\widehat{x} + D\,u \end{cases}$$

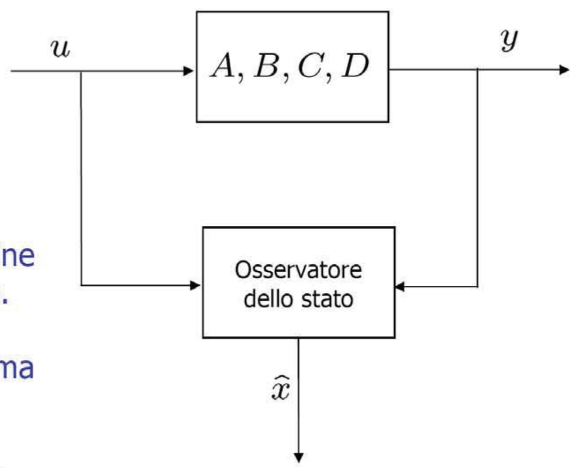
uscita stimata (calcolata cioè sulla base dello stato stimato)

la matrice della dinamica è la stessa

uscita effettiva (misurata)

L’Osservatore di Luenberger – 2

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = A\,\widehat{x} + B\,u + L(y - \widehat{y}) \\ \widehat{y} = C\,\widehat{x} + D\,u \end{cases}$$



- L’osservatore di Luenberger è un sistema dinamico lineare.
- L’ordine di queste sistema è lo stesso ordine del sistema di cui si vuole stimare lo stato.
- Lo stato dell’osservatore è $\widehat{x}$, cioè la stima dello stato “vero ” del sistema.
- L’osservatore di Luenberger ha in ingresso, oltre all’ingresso del sistema osservato, anche un termine “correttivo” $L(y - \widehat{y})$

L'Osservatore di Luenberger – 3

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + B\,u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\,\hat{x} + D\,u \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima e ricordando che $y = C\,x + D\,u$ si può scrivere:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + (B - LD)u + Ly$$

ossia, in forma compatta:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + [B - LD \quad L]\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

Dunque:

1. la dinamica dello stato stimato è governata dalla matrice $A - LC$
2. il vettore di ingresso dell'osservatore è composto dall'ingresso e dall'uscita del sistema da osservare.

Dinamica dell'Errore

L'errore di stima a un dato istante di tempo è la differenza fra lo stato effettivo del sistema e lo stato stimato dall'osservatore:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Come evolve nel tempo l'errore di stima? Derivando la precedente si trova

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A\,x + B\,u - [A\,\hat{x} + B\,u + L(\underbrace{y - \hat{y}}_{Cx + \cancel{Du} - C\hat{x} - \cancel{Du}})]$$

$$= A\,x + B\,u - [A\,\hat{x} + B\,u + LC(x - \hat{x})] = (A - LC)(x - \hat{x})$$

ossia $$\boxed{\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)}$$

sistema lineare autonomo governato dalla matrice $A - LC$

Dinamica dell'Errore – 2

Integrando si trova

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$$

Se gli autovalori di $A - LC$ sono nel semipiano sinistro aperto, allora si avrà che $e(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ indipendentemente dallo stato iniziale $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$

In altre parole, quale che sia il valore iniziale dell'errore di stima, esso tende asintoticamente a zero.

valore al quale viene inizializzato lo stato dell'osservatore

$\boxed{\text{E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori della matrice } A - LC \text{ tramite la scelta di una opportuna } L \in R^{n \times p} \text{ SE E SOLO SE se la coppia } (A, C) \text{ è osservabile.}}$

Sistemi Rilevabili

Quindi se il sistema è osservabile, la dinamica dell'errore di stima

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

può essere arbitrariamente fissata attraverso la scelta del guadagno L dell'osservatore di Luenberger. Naturalmente, se si vuole che l'errore vada a zero almeno asintoticamente, la dinamica dovrà essere scelta *stabile*.

Se invece il sistema (ovvero la coppia (A, C)) non è osservabile, allora è ancora possibile costruire un osservatore stabile a patto che i modi non osservabili (quelli che non si possono alterare attraverso la scelta di L) siano stabili.

Un sistema (o una coppia (A, C)) tale che gli eventuali modi non osservabili siano asintoticamente stabili si dice *rilevabile* (detectable)

Scelta del Guadagno dell'Osservatore

E' ovviamente auspicabile non solo che l'errore di stima vada a zero asintoticamente, ma anche che vada a zero "in maniera sufficientemente veloce". Questo significa che gli autovalori dell'osservatore devono essere sufficientemente lontani dall'asse immaginario (cioè avere parte reale sufficientemente negativa). Ma d'altra parte un guadagno troppo grande rende l'osservatore troppo sensibile al rumore di misura, riducendo l'accuratezza della stima.

Riassumendo, gli autovalori da assegnare all'osservatore vanno scelti tenendo conto due opposte esigenze:

- rapidità di convergenza della stima
- insensibilità al rumore di misura

Osservazione

E' importante rilevare che nel caso dell'osservatore, la presenza del rumore di misura **è l'unica** ragione che impedisce l'impiego di guadagni arbitrariamente alti (e quindi di stime arbitrariamente veloci). Questo perché l'osservatore è tipicamente implementato in un calcolatore digitale, ove non vi è alcuna limitazione all'impiego di guadagni elevati.

Nel caso della scelta del guadagno K della retroazione dello stato invece, oltre al rumore di misura dello stato stesso, vi è anche il limite fisico dovuto alle sollecitazioni massime che gli attuatori possono sopportare.

Stima *Ottima* dello Stato

Si è appena visto che il rumore pone un vincolo alla durata del transitorio dell'osservatore.

DOMANDA: assumendo di avere delle informazioni circa il rumore (di processo e di misura), è possibile scegliere la matrice L in maniera ottima, rispetto ad un ragionevole criterio?

RISPOSTA: SI', ciò è possibile ricorrendo al *filtro di Kalman-Bucy* (comunemente noto come *filtro di Kalman*)

Rudolf Kalman…

Il presidente Barack Obama ha conferito, il 7 Ottobre 2008, la National Medal of Science al Prof. Rudolf Kalman. Immagine della cerimonia alla Casa Bianca preso dal link: http://sting.deis.unibo.it/sting/Img/

Il Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo (sotto certe ipotesi sul rumore e rispetto ad un certo criterio di ottimalità)

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

rumore *di processo* (dovuto ad esempio a disturbi in ingresso)

rumore *di misura* (dovuto ad esempio a imperfezioni del sensore di misura)

In questo caso con y si indica l'uscita <u>misurata</u> (cioè l'uscita effettiva del sistema più il rumore di misura)

N.B. la scrittura qui sopra è equivalente a quella qui a fianco, nella familiare forma (A,B,C,D)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} B & \Gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} \\ y = Cx + \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ipotesi – 1

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

Si assume che sia w che v siano processi stocastici Gaussiani, stazionari, bianchi e a media nulla.

$w(t)$ e $v(t)$ sono, $\forall t$, variabili casuali a distribuzione Gaussiana.

$$E(w(t)) = 0, \ \forall t \qquad E(v(t)) = 0, \ \forall t$$

$$E(w(t)w^T(t)) = W, \ \forall t \qquad E(v(t)v^T(t)) = V, \ \forall t$$

$$E(w(t_1)w^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2 \qquad E(v(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2$$

Matrici simmetriche e definite positive (per definizione di covarianza)

Ipotesi – 2

Inoltre i rumori di processo e di misura sono fra loro indipendenti, ossia

$$E(w(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1, t_2$$

Si assume poi che lo stato iniziale sia una variabile casuale, indipendente dalle precedenti, Gaussiana di media e covarianza note:

(sotto queste ipotesi, quale è la migliore inizializzazione dell'osservatore?)

$$E(x(0)) = x_0$$

$$E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = P_{e0}$$

Teorema (Filtro di Kalman)

Nelle ipotesi appena enunciate, se le coppie (A, Γ) e (A, C) sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l'osservatore

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

è stabile ed ottimo (nel senso che minimizza la covarianza $E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$ dell'errore di stima *a regime*) se il guadagno viene scelto come segue

$$L^* = P_e^* C^T V^{-1}$$

dove P_e^* è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'*equazione algebrica di Riccati duale:*

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0$$

Osservazione

L'equazione di Riccati appena vista si può ottenere dall'equazione di Riccati per il controllo LQ:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0$$

effettuando le sostituzioni seguenti:

$$A \rightarrow A^T$$
$$B \rightarrow C^T$$
$$M \rightarrow \Gamma^T$$
$$Q \rightarrow W$$
$$R \rightarrow V$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se i rumori di processo e misura sono descritti da

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; V = \rho > 0, \; W = 1$$

il filtro ottimo è dato da

$$L^* = P_e^* C^T V^{-1}$$

dove P_e^* è la soluzione simmetrica e definita positiva di

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0$$

Esempio – 2

Sostituendo si perviene all'equazione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_e + P_e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} P_e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \;\; 1] P_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \;\; 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione definita positiva è $P_e^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$

da cui $L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$

Esempio – Osservazione

$$L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$$

Entrambe le componenti della matrice di guadagno dell'osservatore sono funzioni monotone decrescenti di ρ .

Quindi se la covarianza dell'errore di misura aumenta, il guadagno dell'osservatore ottimo diminuisce.

Questo è del tutto ragionevole, perché se le misure sono molto rumorose è opportuno che l'osservatore dia loro meno credito nell'aggiornare il proprio stato.

Sistemi a Tempo Discreto: KF

La formulazione del problema del filtro di Kalman per i sistemi a tempo discreto è analoga al caso continuo:

Consideriamo il sistema:

Rumore di processo (dovuto ad esempio a disturbi in ingresso)

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = C\,x(t) + v(t) \end{cases}$$

Rumore di misura dovuto alla non idealità dei sensori di misura

In questo caso con y si indica l'uscita misurata (cioè l'uscita effettiva del sistema più il rumore di misura)

Ipotesi

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + Bu + \Gamma w \\ y = C\,x + v \end{cases}$$

Si assume che sia w che v siano processi stocastici Gaussiani, stazionari, bianchi e a media nulla.

$w(t)$ e $v(t)$ sono, $\forall t$, variabili casuali a distribuzione Gaussiana.

$E(w(t)) = 0, \ \forall t$	$E(v(t)) = 0, \ \forall t$
$E(w(t)w^T(t)) = W, \ \forall t$	$E(v(t)v^T(t)) = V, \ \forall t$
$E(w(t_1)w^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2$	$E(v(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2$

Ipotesi - 2

Inoltre i rumori di processo e di misura sono fra loro indipendenti, ossia

$$E(w(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1, t_2$$

Si assume poi che lo stato iniziale sia una variabile casuale, indipendente dalle precedenti, Gaussiana di media e covarianza note:

$$E(x(0)) = x_0$$

$$E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = P_{e0}$$

Teorema: Filtro di Kalman a Tempo Discreto

Nelle ipotesi appena enunciate, se le coppie (A, Γ) e (A, C) sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l'osservatore

$$\hat{x}(t+1) = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

è stabile ed ottimo (nel senso che minimizza la covarianza $E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T]$ dell'errore di stima *a regime*) se il guadagno viene scelto come segue

$$L^* = P_e^* C^T (C P_e^* C^T + V)^{-1}$$

dove P_e^* è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'*equazione algebrica di Riccati duale:*

$$P_e = A\left[P_e - P_c C^T \left[V + C P_e C^T\right]^{-1} C P_e\right] A^T + \Gamma W \Gamma^T$$

Osservazione

L'equazione di Riccati appena vista si può ottenere dall'equazione di Riccati per il controllo LQ:

$$P_c = A^T \left[P_c - P_c B \left[R + B^T P_c B \right]^{-1} B^T P_c \right] A + M^T Q M$$

effettuando le sostituzioni seguenti:

$$A \rightarrow A^T$$
$$B \rightarrow C^T$$
$$M \rightarrow \Gamma^T$$
$$Q \rightarrow W$$
$$R \rightarrow V$$

Predizione e Filtraggio

Osservazioni

Il filtro di Kalman come predittore/ricostruttore ottimo

Teoria della Predizione e Filtraggio: *Cenni*

- Riprendiamo ad analizzare il problema della **stima dello stato** di un sistema dinamico. Supponiamo ancora una volta di analizzare un sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$$

- Lo **stato non** e' **misurabile**, quindi dovremo stimarlo a partire da ciò che possiamo misurare: **uscite del sistema ed ingressi di controllo**.
- Stavolta vogliamo risolvere il **problema della stima** come un **problema di ottimizzazione**, minimizzando la varianza dell'errore di stima.
- Mostreremo che il **filtro ottimo** in tal caso e' proprio il **filtro di Kalman**.

Definizioni

- Si possono definire stimatori dello stato di tipo diverso (e con finalità differenti) :
  - assumiamo che siano noti i dati

$$Y_k = \{y(t), u(t) : t \leq k\}$$

  - facendo uso dei dati Y_k vogliamo stimare lo stato x(k+m)
  - si parla allora di
    - **predizione** se **m > 0** $\quad Y_k \Longrightarrow x(k+m)$
    - **filtraggio** se **m = 0** $\quad Y_k \Longrightarrow x(k)$

Il Filtro di Kalman come *Preditttore Ottimo*

- Supponiamo che il sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$$

sia tale per cui lo stato non sia completamente accessibile. Come già affermato in precedenza, abbiamo bisogno di stimare la parte di stato che non è possibile misurare.

- Vogliamo ora dimostrare che il **filtro di Kalman** e' il **predittore ottimo** (che minimizza l'errore di predizione) nell'ipotesi di rumori (di processo e misura) v.a. di tipo rumore bianco gaussiano.

Il Filtro di Kalman: Predittore Ottimo – 2

- Consideriamo il predittore ad un passo espresso da

(k1) $$\hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + L(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\right]$$

- L'errore di ricostruzione e' dato da $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t) + w(t) - L(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\right]$$
$$= \begin{bmatrix} I & -L(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right)$$

- Vogliamo determinare L(t) in modo da **minimizzare la varianza dell'errore di predizione**. Per far ciò consideriamo le caratteristiche del rumore ed andiamo a valutare la varianza dell'errore di stima P(t):

Il Filtro di Kalman: Predittore Ottimo – 3

$$P(t) = \mathbb{E}\left[\tilde{x}(t) - \mathbb{E}\tilde{x}(t)\right] \cdot \left[\tilde{x}(t) - \mathbb{E}\tilde{x}(t)\right]^T$$
$$= \cdots$$

- Dopo alcuni passaggi si arriva a questa forma

$$P(t+1) = \begin{bmatrix} I & -L(t) \end{bmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{bmatrix} AP(t)A^T + R_1 & AP(t)C^T + R_{12} \\ CP(t)A^T + R_{12}^T & CP(t)C^T + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ -L^T(t) \end{bmatrix}$$

$$P(0) =, R_0$$

- Si nota che se P(t) e' semidef. positiva, allora lo e' anche P(t+1).

Il Filtro di Kalman: Predittore Ottimo – 4

- L'espressione a cui si e' arrivati e'

$$J(x,\, u) = \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_x & Q_{xu} \\ Q_{xu}^T & Q_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

- Si può minimizzare allora (e trovare la sequenza dei L(t) ottimi utilizzando un procedimento analogo a quello del Controllo Ottimo a partire dalla tecnica del completamento dei quadrati:
  - se [C P(t)C^T+R_2] e' def. positiva allora la soluzione e'

$$L(t) = \left(A\,P(t)\,C^T + R_{12}\right)\cdot\left(R_2 + C\,P(t)\,C^T\right)^{-1} \quad \text{(k2)}$$

Il Filtro di Kalman: Predittore Ottimo – 5

- In tal caso la varianza assume l'espressione (minimizzata)

$$\begin{aligned} P(t+1) = {} & A\,P(t)\,A^T + R_1 + \\ & - \left(A\,P(t)C^T + R_{12}\right)\cdot\left(R_2 + C\,P(t)C^T\right)^{-1}\cdot \\ & \cdot\left(C\,P(t)A^T + R_{12}^T\right) \qquad \text{(k3)} \end{aligned}$$

$$P(0) = R_0$$

- Il ricostruttore costituito dalle equazioni (k1), (k2) e (k3) prende il nome di **filtro-predittore di Kalman**

Teorema: il Filtro di Kalman come Predittore

- Dato il sistema $\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$

- Il **ricostruttore**

$$\hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + L(t)\,[y(t) - C\hat{x}(t|t-1)]$$

e' **ottimo** (la varianza dell'errore di predizione e' minimizzata) se la matrice

$$R_2 + C\,P(t)C^T$$

e' definita positiva e se la matrice di guadagno L(t) e' scelta in base alle eq. (k2) e (k3). La varianza minima e' data da (k3).

Osservazioni

- Il problema di ricostruzione (stima) dello stato e' stato risolto come problema di ottimizzazione. Il risultato trovato e' valido per il preditore

$$\widehat{x}(t+1|t) = A\widehat{x}(t|t-1)+Bu(t)+L(t)\,[y(t) - C\widehat{x}(t|t-1)]$$

- Nell'ipotesi di disturbi aleatori di tipo rumore bianco gaussiano, la stima risulta ottima (nel senso che minimizza la varianza dell'errore di stima).

Osservazioni – 2

- Il filtro di Kalman utilizzato come preditore ad un passo può venire interpretato come il filtro che fornisce il valor atteso condizionato (a posteriori) data l'osservazione di Y_k

$$\underbrace{\widehat{x}(t+1|t)}_{} = \mathbb{E}\left[x(t+1)|Y_t\right]$$

Fa uso delle misure fino all'istante t compreso

$$P(t+1) = \mathbb{E}\left([x(t+1) - \widehat{x}(t+1|t)] \cdot [x(t+1) - \widehat{x}(t+1|t)]^T \,|Y_t\right)$$

- In tale ambito il filtro rientra nella classe degli **stimatori bayesiani** (ed in tale ambito ancora una volta si potrebbe dimostrare che nell'ipotesi di disturbi di tipo rumore bianco gaussiano e' lo stimatore che minimizza la varianza dell'errore di stima).

Osservazioni – 3: Interpretazione

Influenza della dinamica del sistema

Incremento dovuto al rumore di processo

$$P(t+1) = \boxed{A\,P(t)\,A^T} + \boxed{R_1} + \boxed{- \left(A\,P(t)C^T + R_{12}\right) \cdot \left(R_2 + C\,P(t)C^T\right)^{-1} \cdot \left(C\,P(t)A^T + R_{12}^T\right)}$$

Decremento dovuto all'aumento di informazione, dato dalle nuove misure

Esempio Numerico

- Consideriamo un semplice sistema del primo ordine descritto dalle equazioni

rumore bianco gaussiano

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \qquad v = WG(0,1)$$

- Lo stato del sistema in assenza di rumore/incertezza rimane costante e pari al valore iniziale x(0).
- Supponiamo che sia in realtà

$$\mathbb{E}\left[x(0)\right] = m_0 = -2 \qquad \text{var}\left[x(0)\right] = 0.5$$

Esempio – 2

- Il filtro di Kalman (predittore ad un passo) e' allora dato dalle espressioni:

$$\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t|t-1) + L(t)\left[y(t) - \hat{x}(t|t-1)\right]$$

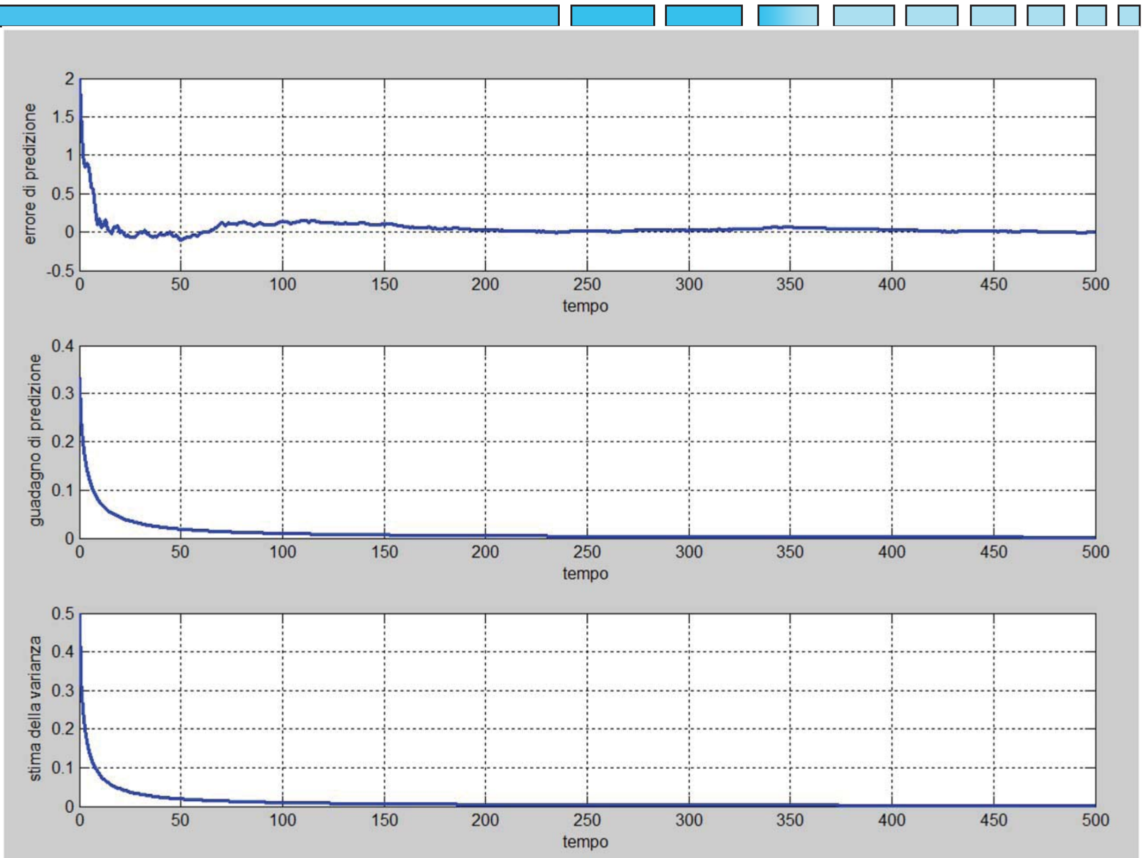
$$L(t) = \frac{P(t)}{\sigma^2 + P(t)}$$

Il guadagno del predittore ad ogni passo

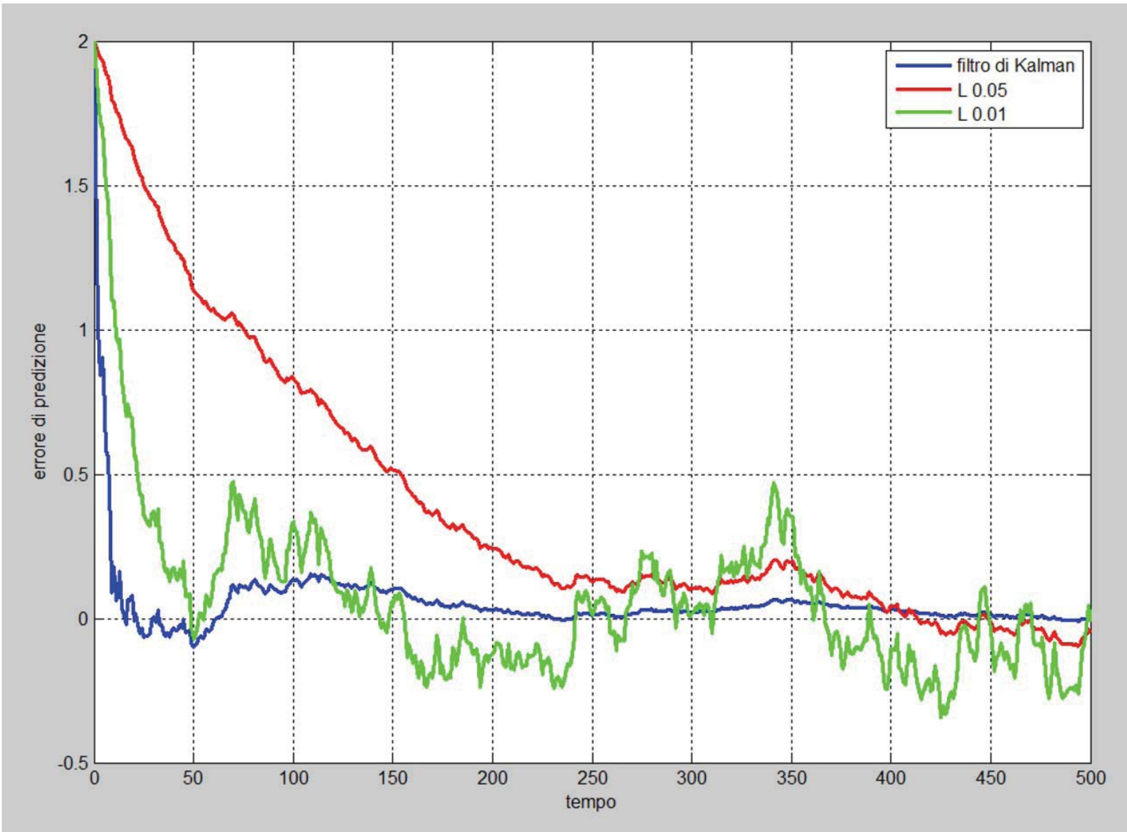
$$P(t+1) = \frac{\sigma^2 P(t)}{\sigma^2 + P(t)}$$

L'equazione di aggiornamento dell'incertezza

Esempio – 3



Esempio – 4



Il Filtro di Kalman come Filtro Ottimo

- Supponiamo adesso di voler stimare lo stato attuale del sistema facendo uso dei dati raccolti sino all'istante di tempo attuale: vogliamo risolvere il problema di filtraggio (definito in precedenza)

$$Y_t = \{y(t_k),\, u(t_k) : t_k \leq t\} \qquad\qquad Y_t \Longrightarrow x(t)$$

- In maniera analoga a quanto fatto in precedenza, si può dimostrare che il **filtro di Kalman** e' il **filtro ottimo** (nel senso che minimizza la varianza dell'errore di stima).

Teorema: *Il Filtro di Kalman come Filtro Ottimo*

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$$

- Supponiamo inoltre che siano disponibili i dati

$$Y_t = \{y(t_k),\, u(t_k) : t_k \le t\}$$

- Nell'ipotesi che la matrice

$$R_2 + C\,P(t|t-1)\,C^T$$

sia **definita positiva** allora si ha che:

Teorema: Il Filtro di Kalman come Filtro Ottimo – 2

- il filtro ottimo (che minimizza la varianza di stima) e' dato da

$$\widehat{x}\,(t|t) = \widehat{x}\,(t|t-1) + L_f(t)\;[y(t) - C\,\widehat{x}\,(t|t-1)] \qquad \text{(kf1)}$$

$$\widehat{w}(t|t) = L_w(t)\,[y(t) - C\,\widehat{x}(t|t-1)]$$

$$\begin{aligned}\widehat{x}(t+1|t) &= A\widehat{x}(t|t) + Bu(t) + \widehat{w}(t|t) \\ &= A\widehat{x}(t|t-1) + Bu(t) + L(t)\,[y(t) - C\widehat{x}(t|t-1)]\end{aligned}$$

- dove

$$L_f(t) = P(t|t-1)\,C^T\left[CP(t|t-1)C^T + R_2\right]^{-1}$$

$$L_w(t) = R_{1,2}\left[CP(t|t-1)C^T + R_2\right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}L(t) &= AL_f(t) + L_w(t) = \\ &= \left[AP(t|t-1)C^T + R_{1,2}\right]\left[CP(t|t-1)C^T + R_2\right]^{-1}\end{aligned}$$

Teorema: Il Filtro di Kalman come Filtro Ottimo – 3

- La varianza e' data dall'equazione di Riccati

$$P(t+1|t) = AP(t|t-1)A^T + R_1 - L(t)\left[CP(t|t-1)C^T + R_2\right]L^T(t)$$

$$P(t|t) = P(t|t-1) - P(t|t-1)C^T\left[CP(t|t-1)C^T + R_2\right]^{-1}CP(t|t-1)$$

$$P(0|-1) = R_0$$

- La dimostrazione si ottiene in modo analogo a quella del caso del predittore ad un passo.

Osservazioni Finali

- La notazione P(t|t) mette in evidenza i dati a disposizione ad ogni istante

- Si noti che l'equazione (kf1) ha la stessa struttura dell'equazione (k1) vista in precedenza.

- Chiaramente deve essere

$$\widehat{w}(t+1|t) = 0$$

dato che l'uscita y(t) non può contenere informazioni sul campione w(t+1) del rumore di processo.

Esempio

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x(t+1) &= -ax(t)+e(t) \\ y(t) &= (c-a)x(t)+e(t) \end{cases} \qquad |c|<1, \quad e = WN(0,\sigma^2)$$

- In tal caso si ha $\qquad R_1 = R_2 = R_{1,2} = \sigma^2$

- Il filtro di Kalman stazionario e' dato da

$$P = a^2P + \sigma^2 - \frac{\left(\sigma^2 - aP(c-a)\right)^2}{(c-a)^2P+\sigma^2} = 0 \qquad L = \frac{\sigma^2 - aP(c-a)}{(c-a)^2P+\sigma^2} = 1$$

Progetto del Filtro in Matlab® e Simulink®

kalman

Design continuous- or discrete-time Kalman estimator

Syntax

```
[kest,L,P] = kalman(sys,Qn,Rn,Nn)
[kest,L,P,M,Z] = kalman(sys,Qn,Rn,Nn)    % discrete time only
[kest,L,P] = kalman(sys,Qn,Rn,Nn,sensors,known)
```

Description

`kalman` designs a Kalman state estimator given a state-space model of the plant and the process and measurement noise covariance data. The Kalman estimator is the optimal solution to the following continuous or discrete estimation problems.

➢**Esempio di progetto in Matlab…** Seguire il link:
`http://www.silviosimani.it/Kalman_filter_FDI.zip`

Riferimenti Bibliografici

- "Kalman Filtering: Whence, What and Whither?" by B. D. O. Anderson and J. B. Moore.
- BRIAN D. O. ANDERSON and JOHN B. MOORE, "Optimal Filtering". INFORMATION AND SYSTEM SCIENCES SERIES. Thomas Kailath Editor.
- R. E. KALMAN, Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" (1960). Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45.
- "An Introduction to the Kalman Filter", by Greg Welch and Gary Bishop. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC 27599-3175. April 5, 2004.
- Pattern Recognition and Machine Vision: Kalman Filter. By Dr. Simon J.D. Prince Computer Science University College London. Gower Street, London, WC1E 6BT.
- "Least-Squares Estimation: From Gauss to Kalman". By H.W. Sorenson. University of California. San Diego. IEEE Spectrum, vol. 7, pp. 63-68. July, 1970.
- Kalman filter Main Home Page: Some tutorials, references, and research on the Kalman filter. The site is maintained by Greg Welch and Gary Bishop, faculty members of the Department of Computer Science at the University of North Carolina at Chapel Hill.

- PDF disponibili al link: `http://www.silviosimani.it/KF_lesson.html`