



TECNICHE DI CONTROLLO E DIAGNOSI

Introduzione alla Logica Fuzzy

*"Ragionamento approssimato con
concetti definiti in modo vago"*

Presenter: Dott. Ing. SIMANI SILVIO

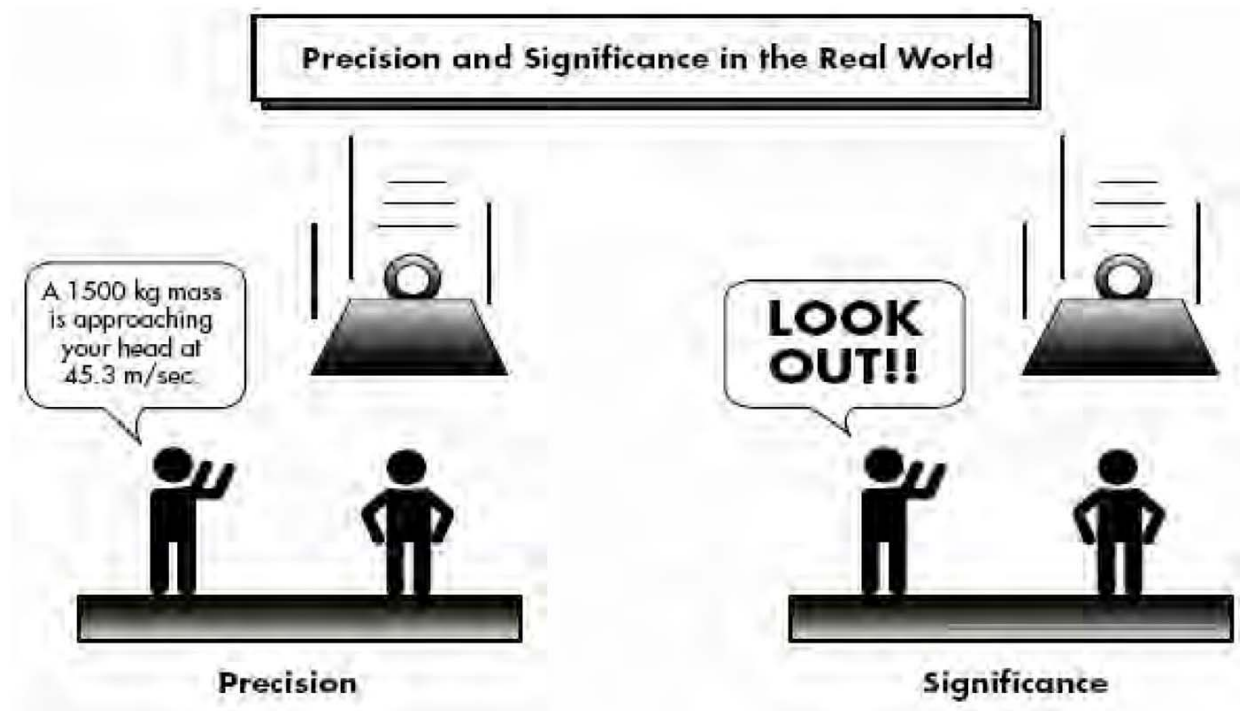
con supporto di
Dott. Ing. MARCELLO BONFE'

Ringraziamenti



- ➡ Le dispense sono prese dal corso del Prof.
Stefano Marsili-Libelli: Introduzione ai Fuzzy Sets.
Dipartimento di Sistemi e Informatica Facoltà di
Ingegneria Via S.Marta, 3. 50139 Firenze. Home
page: <http://dsi.ing.unifi.it/~marsili/>

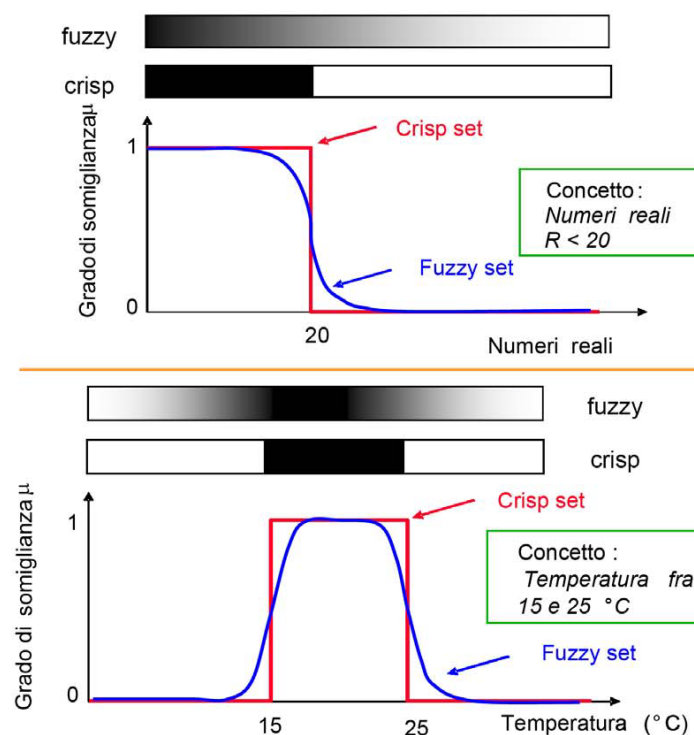
Esempio: Precisione o Significato?



3

Introduzione alla Logica Fuzzy

Logica Fuzzy e “Grado di Appartenenza”



Il ragionamento “crisp” opera solamente con i concetti di **uguale** o **diverso** (non uguale)

Il ragionamento “fuzzy” introduce la nozione di “**grado di somiglianza**” come appartenenza di un concetto ad un **prototipo** predefinito che ha la funzione di termine di paragone

Perciò il risultato hard **vero/falso** si “ammorbidisce” nel grado di appartenenza, che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1 con continuità

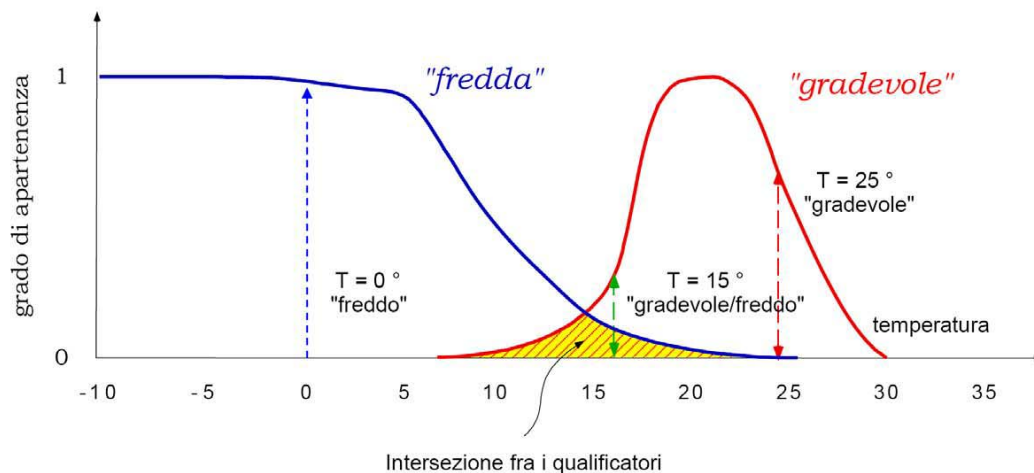
Le **curve blu** rappresentano i **prototipi** corrispondenti ai concetti espressi nelle scatole verdi

4

Introduzione alla Logica Fuzzy

Qualificatori e Grado di Appartenenza

Dato l'insieme di supporto delle temperature ambientali definire i qualificatori di temperatura "gradevole" e "fredda"



- Ciascun qualificatore deve valere 1 per almeno un valore del supporto (Normalità)
- L'insieme dei qualificatori deve coprire l'intero supporto (Completezza)
- Ci possono essere delle sovrapposizioni (Ambiguità)

5

Introduzione alla Logica Fuzzy

Logica Fuzzy e Probabilità: Confronto

La Fuzziness esprime il grado di verità di un oggetto rispetto ad un concetto predefinito, basato su una *esperienza diretta*, mentre la probabilità esprime *l'eventualità* che un evento futuro possa o non possa accadere.



Bezdek, 1991



A: Potabile con fuzziness = 0.9

Da quale bottiglia preferireste bere?



B: Potabile con probabilità = 0.9

Il contenuto della bottiglia è "simile" ad acqua potabile con "somiglianza pari a 90%. Questa è un'affermazione basata su una *reale confronto* fra il contenuto di *quella* bottiglia ed un'acqua potabile di riferimento. Questa è una certezza!

C'è una probabilità su 10 che il contenuto della bottiglia *NON* sia potabile !!!
Questa è un'affermazione basata su un test statistico, che basandosi *induttivamente* su un gran numero di test (*ma non su quella bottiglia!*), tenta di inferire il contenuto di quella bottiglia. Non c'è alcuna certezza circa il reale contenuto di *quella* bottiglia!

6

Introduzione alla Logica Fuzzy

Insiemi Fuzzy: Definizioni di Base

☞ **Supporto:** l'intervallo $X \in \mathcal{R}$ di interesse per la variabile indipendente x

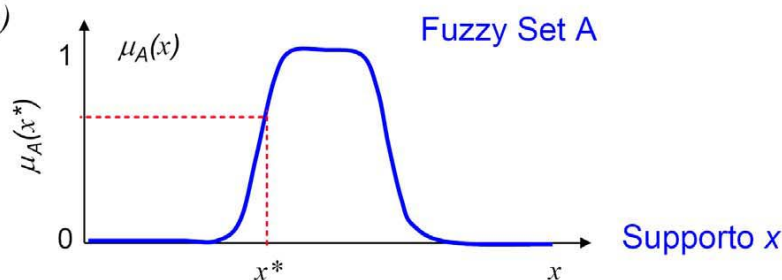
☞ **Funzione di appartenenza:** la funzione $\mu(x)$ che fornisce il **grado di verità** per ciascun valore di $x \in X$. Tale funzione definisce operativamente il fuzzy set A come

$$A = \{\mu_A(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$

☞ Il fuzzy set generalizza il concetto di appartenenza (*grado di verità*) graduandolo attraverso la funzione di appartenenza $\mu(x)$

☞ Dato un supporto X , un fuzzy set A su X è definito dalla funzione di appartenenza $\mu(x)$ che associa ciascun elemento di $x \in X$ ad un grado di verità associato al Fuzzy Set A attraverso $\mu(x)$

Funzione di appartenenza
 $\mu(x)$



7

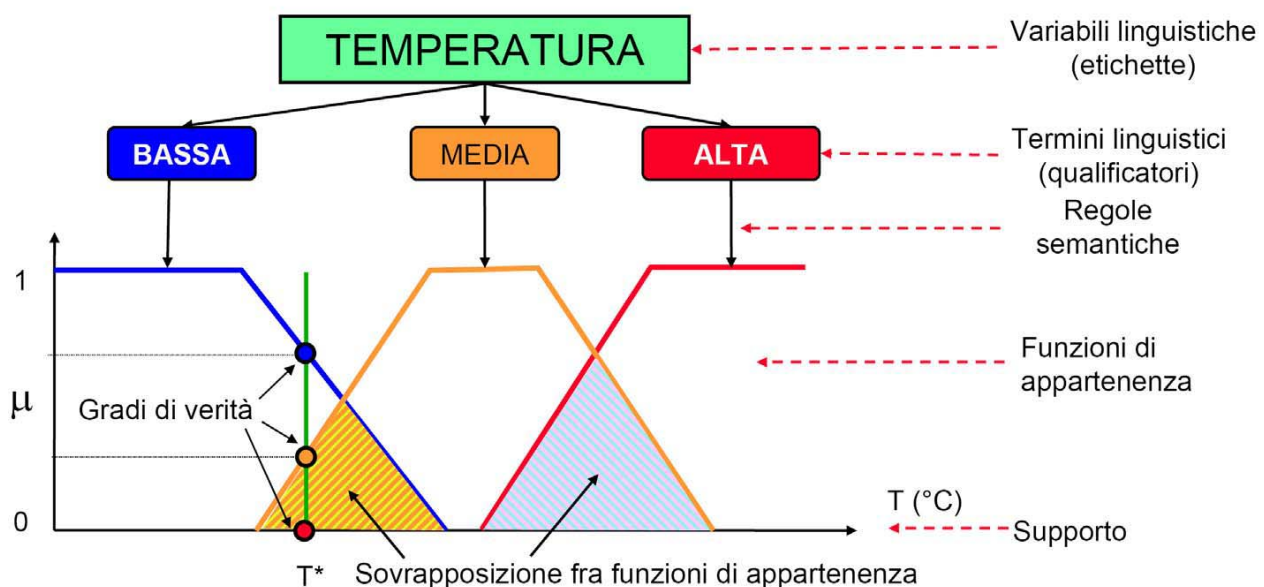
Introduzione alla Logica Fuzzy

Variabili Linguistiche

Una variabile linguistica è un'etichetta che definisce un concetto.

Ad essa corrisponde una funzione di appartenenza (qualificatore).

Esso determina il grado di verità μ di un qualsiasi valore del supporto.

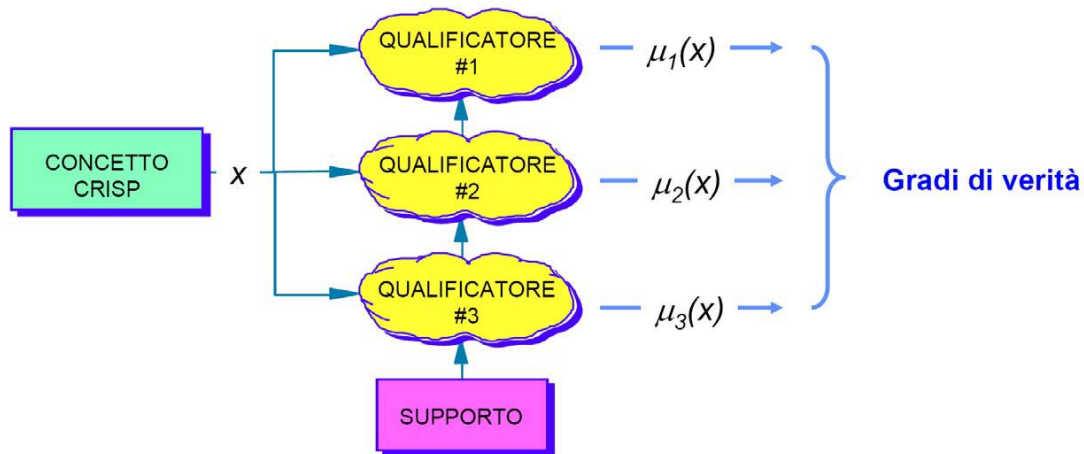


8

Introduzione alla Logica Fuzzy

“Fuzzy-ficazione”

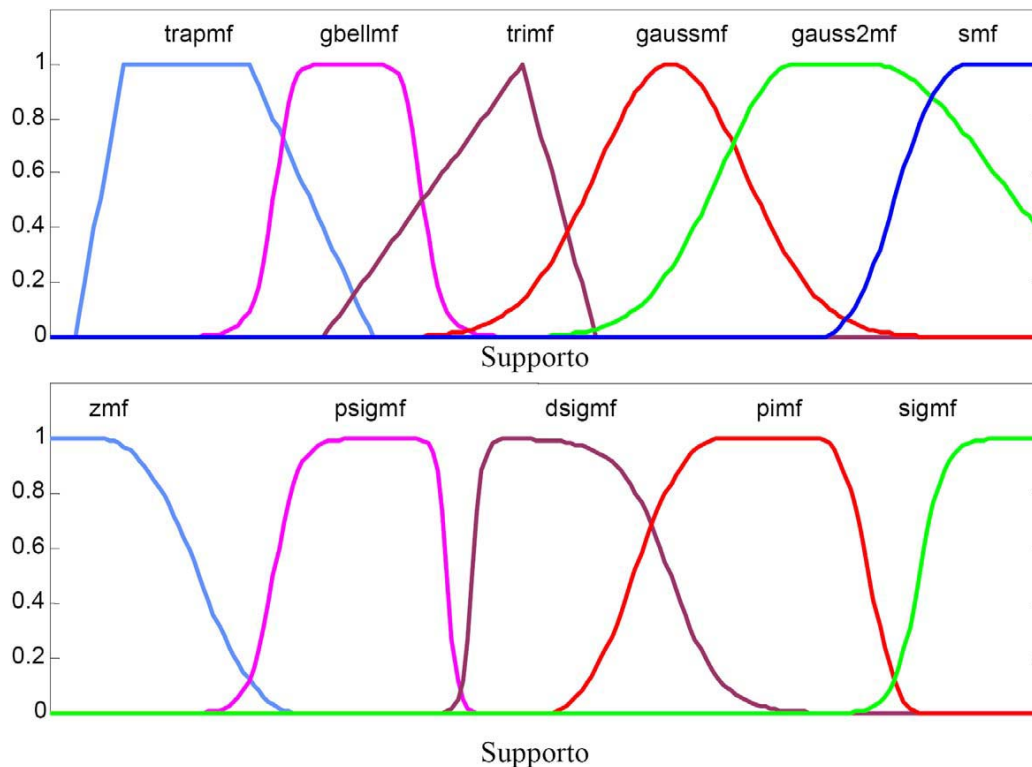
Consiste nella determinazione dei gradi di verità di un dato concetto rispetto ad un insieme di qualificatori predefiniti



Il risultato della fuzzificazione è un vettore contenente i gradi di verità del concetto rispetto ai qualificatori

$$x \xrightarrow{\text{fuzzificazione}} [\mu_1(x) \quad \mu_2(x) \quad \mu_3(x)]$$

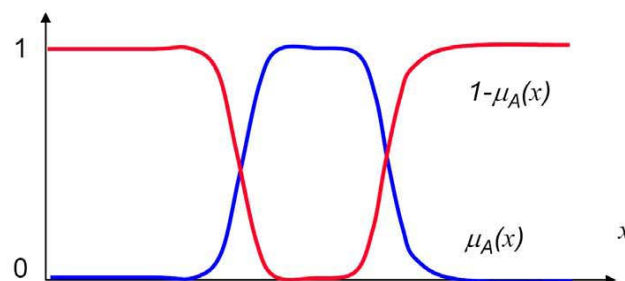
I Qualificatori nel Fuzzy Logic Toolbox™



Proprietà degli Insiemi Fuzzy

- ☞ **Insieme complemento:** il fuzzy set con funzione di appartenenza complementare rispetto a μ

$$\bar{A} : \{\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$

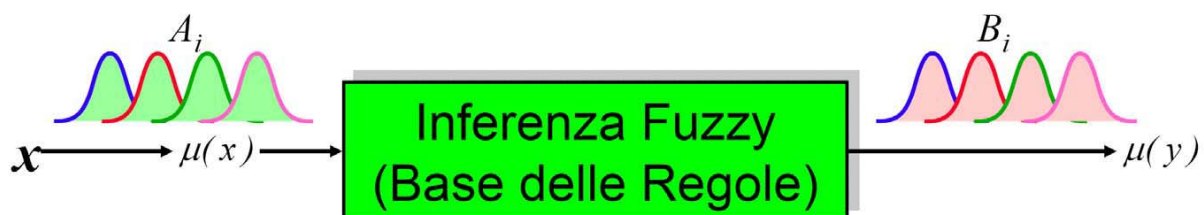


- ☞ **Normalità:** se esiste almeno un elemento di $x \in X$ tale che $\mu(x) = 1$
- ☞ **Completezza:** dato un insieme di fuzzy set $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ definiti tramite le funzioni di appartenenza $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ su un supporto $X \in \mathcal{R}$, tale insieme dicesi **completo** se per un qualsiasi $x \in X$ esiste almeno una funzione di appartenenza nell'insieme $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ diversa da zero.

11

Introduzione alla Logica Fuzzy

Logica Fuzzy: Regole di Inferenza



Regola di inferenza $R_i : \underbrace{IF\ x_1\ is\ A_1\ AND\ x_2\ is\ A_2}_{\text{antecedente}}\ THEN\ \underbrace{y\ is\ B}_{\text{conseguente}}$

- ☞ Alla base della logica fuzzy stanno le regole di inferenza
- ☞ Più predicati fuzzy possono essere **connessi** fra loro (**AND**)
- ☞ Dato un predicato **antecedente**, la sua verità implica (**THEN**) quella del predicato **conseguente**
- ☞ Vanno definiti gli operatori logici di **connessione** fra concetti fuzzy e di **implicazione** fra antecedente e conseguente

12

Introduzione alla Logica Fuzzy

Operatori Fuzzy: Norme Triangolari -> Connettivi AND

$$T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

☞ L'operatore $T(.,.)$ ha le seguenti proprietà

➡ Limitatezza $T(0,0) = 0; T(a,1) = T(1,a) = a$ *Prevale il più piccolo*

➡ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,c)$

➡ Commutatività $T(a,b) = T(b,a)$

➡ Associatività $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

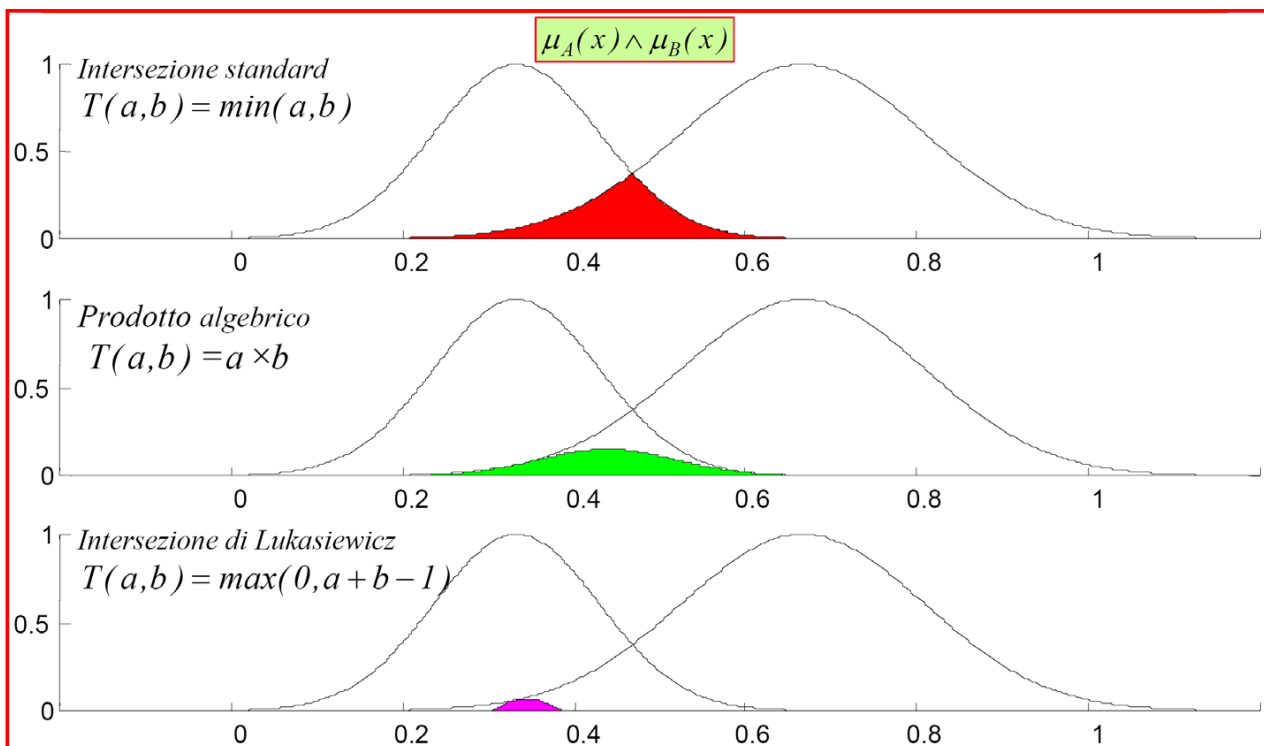
Possibili t -norme

Intersezione standard	$T(a,b) = \min(a,b)$
Prodotto algebrico	$T(a,b) = a \times b$
Intersezione di Lukasiewicz	$T(a,b) = \max(0, a + b - 1)$

13

Introduzione alla Logica Fuzzy

Esempi di T-norm



14

Introduzione alla Logica Fuzzy

Operatori Fuzzy: S-norme Triangolari -> Connettivi OR

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

☞ L'operatore $S(.,.)$ ha le seguenti proprietà

⇒ Limitatezza $S(1,1) = 1; S(a,0) = S(0,a) = a$ *Prevale il più grande*

⇒ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow S(a,b) \leq S(a,c)$

⇒ Commutatività $S(a,b) = S(b,a)$

⇒ Associatività $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$

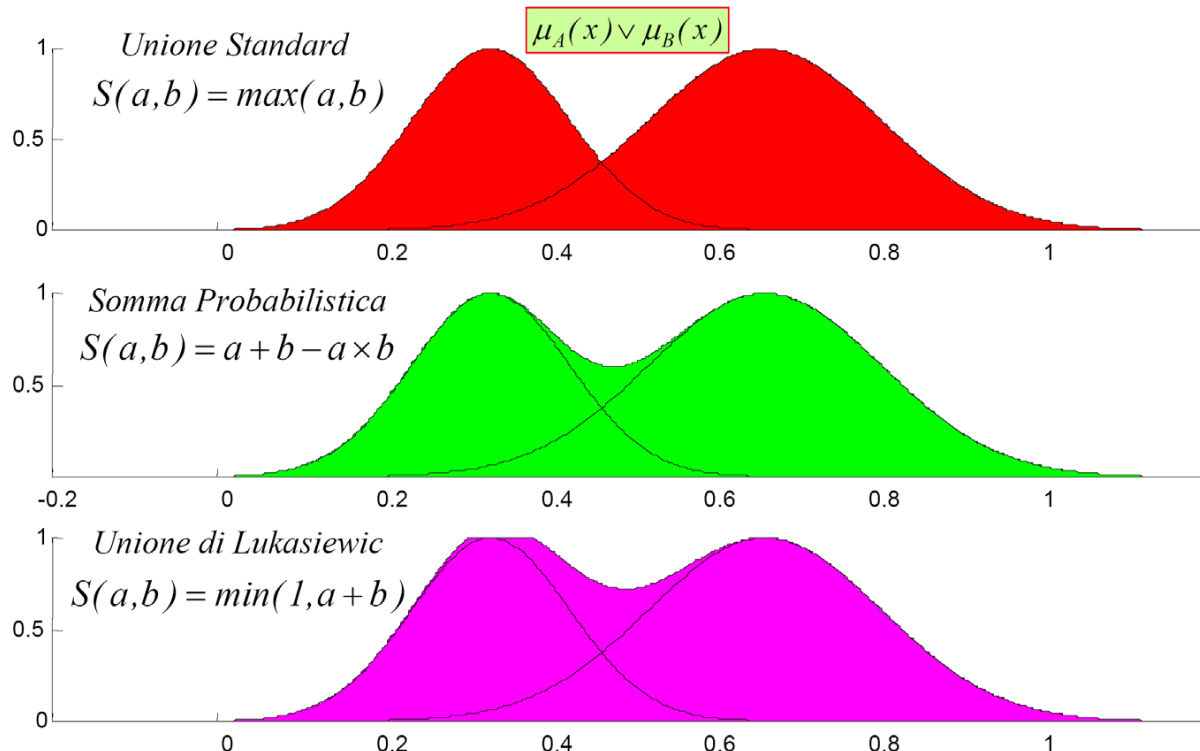
Possibili s-norme

Unione Standard	$S(a,b) = \max(a,b)$
Somma Probabilistica	$S(a,b) = a + b - a \times b$
Unione di Lukasiewicz	$S(a,b) = \min(1, a + b)$

15

Introduzione alla Logica Fuzzy

Esempi di S-norm



16

Introduzione alla Logica Fuzzy

Implicazione Fuzzy: Logica Deduttiva

- ☞ La logica fuzzy è **deduttiva**, nel senso che condiziona la verità del *conseguente* a quella dell'*antecedente*

$$\begin{array}{ccc} \text{IF} & x \text{ is } A & \text{THEN } y \text{ is } B \\ & \text{antecedente} & \text{conseguente} \end{array}$$

- ☞ La notazione $x \text{ is } A$ va intesa come il grado di appartenenza di x al fuzzy set A , ovvero operativamente

$$x \text{ is } A \rightarrow \mu_A(x)$$

- ☞ Analogamente per il conseguente $y \text{ is } B$ va intesa come il grado di appartenenza del conseguente y al fuzzy set B

$$y \text{ is } B \rightarrow \mu_B(y)$$

- ☞ Il problema nuovo rispetto alle precedenti operazioni è che in generale A e B sono definiti su due supporti diversi X e Y !!!
- ☞ Perciò va definito un nuovo operatore: **l'Implicazione fuzzy** che condiziona il grado di verità del conseguente con quello dell'*antecedente*

Implicazione Fuzzy – Esempi

- ☞ L'implicazione

$$R : \text{IF } x \text{ is } A \text{ THEN } y \text{ is } B$$

- ☞ Opera sul prodotto cartesiano fra gli spazi di ingresso (X) e uscita (Y)

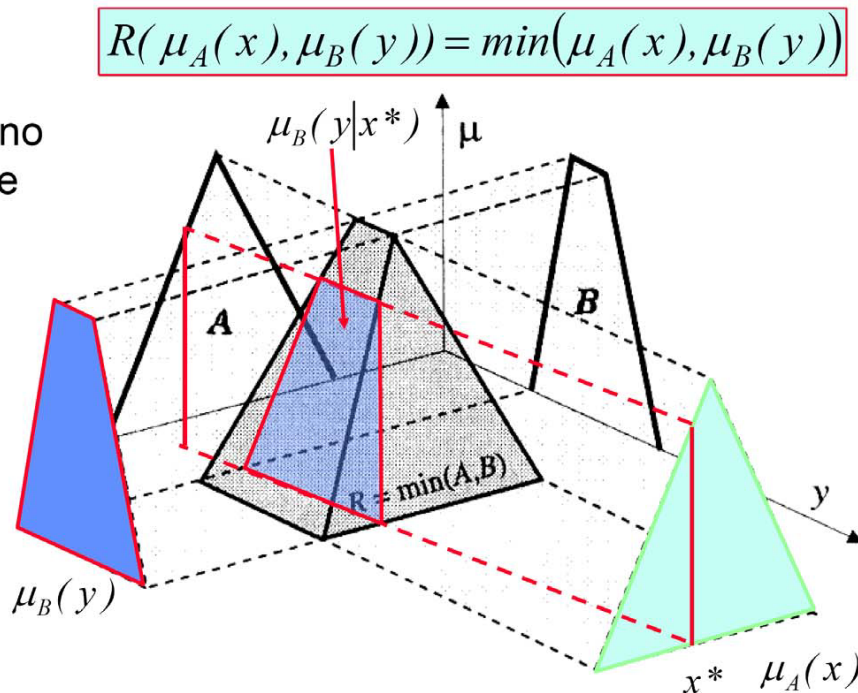
$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

- ☞ Il grado di appartenenza del conseguente è dato dall'operatore di implicazione (THEN), che si realizza con una t -norma

- ☞ Possibili operatori di implicazione t -norme
- $$R : \begin{cases} \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) & \text{Lukasiewicz} \\ \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Kleene} \\ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Mamdani} \\ \mu_A(x) \times \mu_B(y) & \text{Prodotto} \end{cases}$$

“Superficie” di Implicazione Fuzzy – Esempio

L'implicazione fuzzy opera sul prodotto cartesiano dei due supporti e produce una **superficie** di inferenza che rappresenta la relazione fra ingresso (antecedente) e uscita (conseguente)



19

Introduzione alla Logica Fuzzy

Implicazione Fuzzy – Regole

$$R : IF \ x \text{ is } A \text{ THEN } y \text{ is } B$$

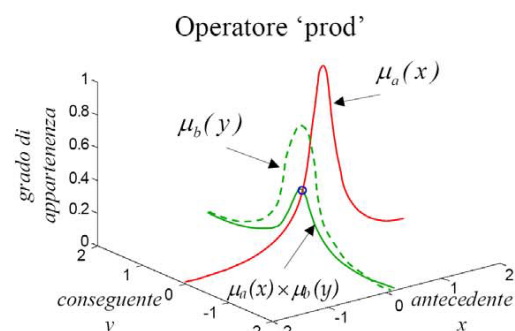
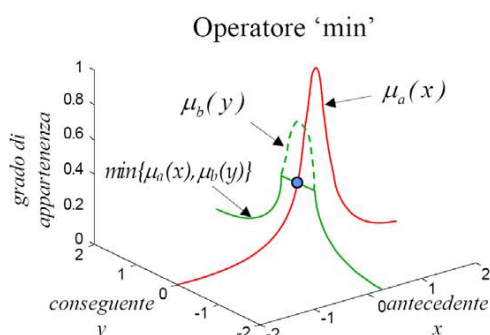
$$S : A \times B \rightarrow \mu_s(x, y) = \mu_a(x) \wedge \mu_b(y) = \begin{cases} \min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\} & x \in X \\ \mu_a(x) \times \mu_b(y) & y \in Y \end{cases}$$

Prodotto Cartesiano
dei due insiemi fuzzy

Connettivo
di implicazione

Possibili
operatori

L'antecedente condiziona il grado di appartenenza del conseguente



20

Introduzione alla Logica Fuzzy

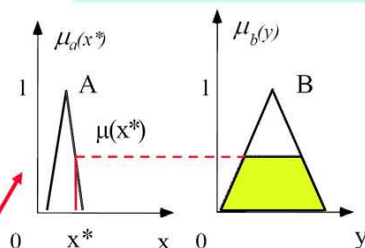
Implicazione con 1 Antecedente

IF x is A THEN y is B

$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \wedge \mu_b(y)$$

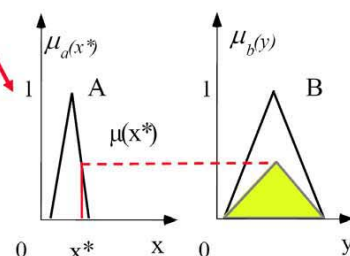
Composizione
'min'

$$x \text{ is } A \Rightarrow \mu_a(x)$$



$$\mu_b(y) = \min(\mu_a(x^*), \mu_b(y))$$

Composizione
'prod'

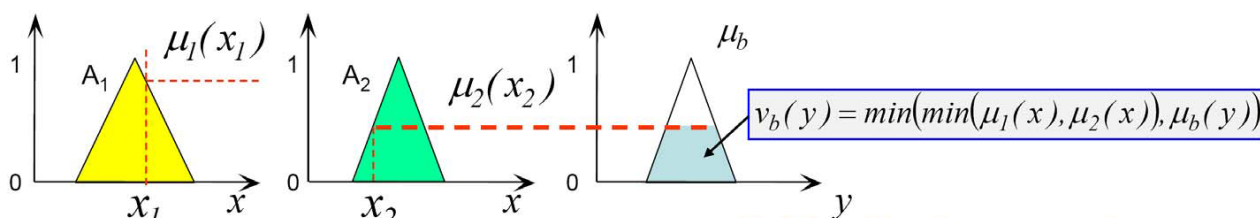


$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \times \mu_b(y)$$

Implicazione con più Antecedenti – Esempio

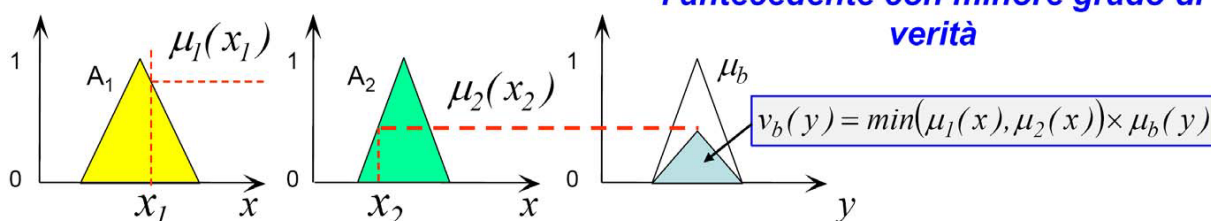
IF $(x_1 \text{ is } A_1) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_2) \text{ THEN } y \text{ is } B$

$$\mu_b(y) = (\mu_1(x^*) \wedge \mu_2(x^*)) \wedge \mu_b(y)$$



$$\mu_b(y) = \min(\min(\mu_1(x), \mu_2(x)), \mu_b(y))$$

**Nell'implicazione prevale
l'antecedente con minore grado di
verità**



$$\mu_b(y) = \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) \times \mu_b(y)$$

Inferenza Fuzzy - Algoritmo

- In genere una sola regola fuzzy non è sufficiente per definire l'intero concetto che vogliamo esprimere
- Si usano allora più regole, connesse fra di loro con il predicato ELSE
- Esempio: si considerino due regole

$R_1 : IF (x_1 \text{ is } A_{11}) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_{21}) \text{ THEN } y \text{ is } B_1$
ELSE

$R_2 : IF (x_1 \text{ is } A_{12}) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_{22}) \text{ THEN } y \text{ is } B_2$

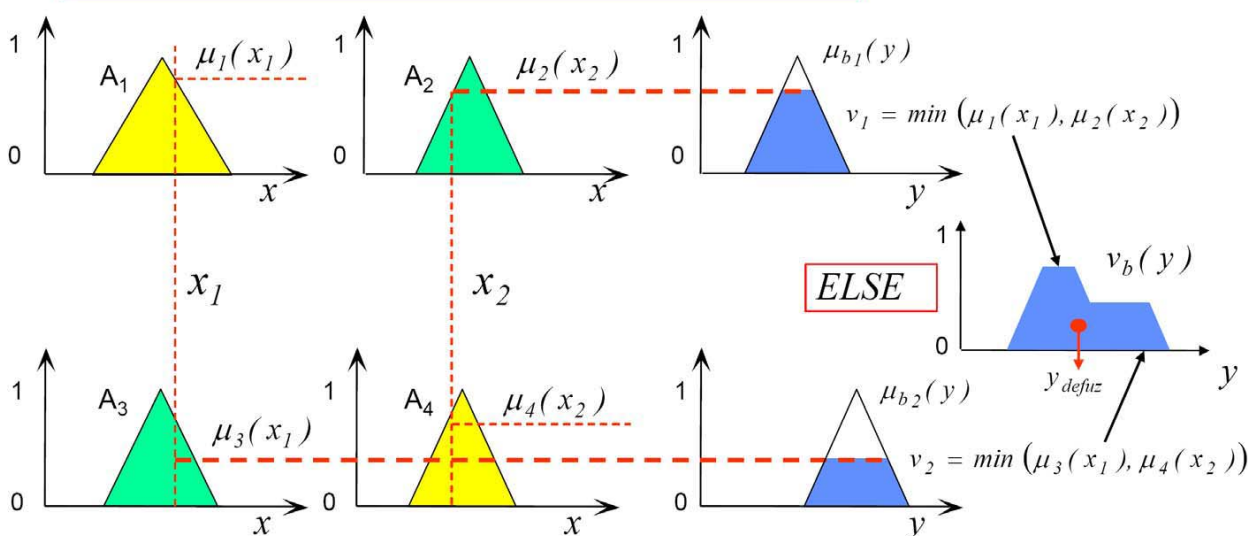
In questo caso si considera l'alternativa fra le somiglianze di x_1 a A_{11} o A_{12} e di x_2 a A_{21} o A_{22} . Ciascun antecedente mappa il conseguente in B_1 o B_2 in funzione del proprio grado di verità

- Tale connettivo rappresenta il grado di alternativa delle singole regole e viene perciò realizzato con un operatore s-norma ($\vee$)

Esempio di Composizione di 2 Regole

Prima regola

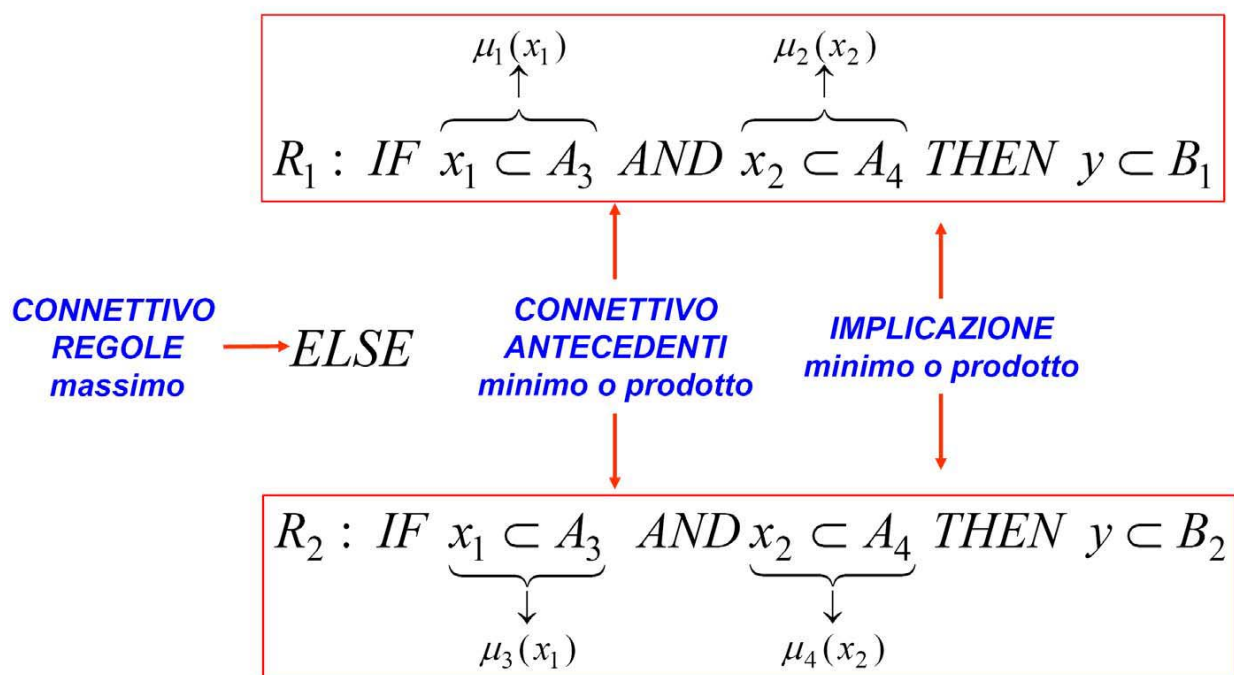
$IF \ x_1 \subset A_1 \ \text{AND} \ x_2 \subset A_2 \ \text{THEN} \ y \subset B_1$



Seconda regola

$IF \ x_1 \subset A_3 \ \text{AND} \ x_2 \subset A_4 \ \text{THEN} \ y \subset B_2$

Connettivi dell'Inferenza Fuzzy



25

Introduzione alla Logica Fuzzy

Inferenza con m Regole e n Antecedenti



m regole

n antecedenti

$R_1 : IF (x_1 \text{ is } A_{1,1}) AND \dots AND (x_n \text{ is } A_{1,n}) THEN (y \text{ is } B_1)$
 $ELSE$
 $\dots$
 $R_m : IF (x_1 \text{ is } A_{m,1}) AND \dots AND (x_n \text{ is } A_{m,n}) THEN (y \text{ is } B_m)$

$$A_{j,i} \rightarrow \mu_{j,i}(x) \quad B_j \rightarrow \mu_{b_j}(y)$$

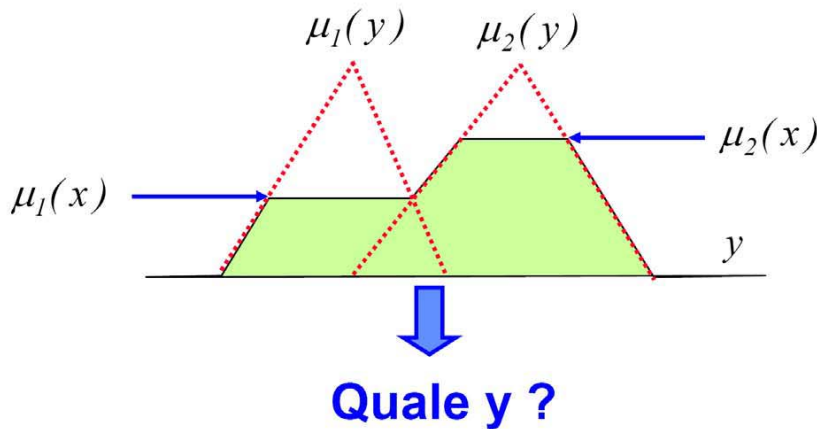
$$\mu_b(y) = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^n \mu_{j,i}(x^*) \right) \wedge \mu_{b_j}(y) \right\}$$

26

Introduzione alla Logica Fuzzy

La De-fuzzy-ficazione – “Interfaccia Esterna”

- Il risultato dell'inferenza fuzzy è un fuzzy set ottenuto per unione (S-norma) dei risultati delle singole inferenze



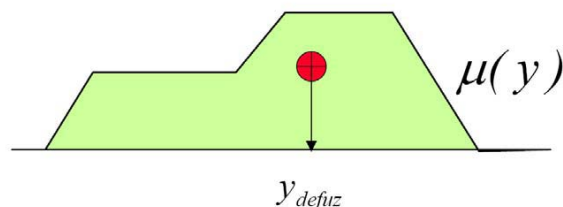
- Il Fuzzy Set colorato in verde rappresenta l'uscita dell'inferenza in termini fuzzy, ma come far corrispondere a questo un *singolo valore crisp di y* rappresentativo dell'inferenza?

27

Introduzione alla Logica Fuzzy

De-fuzzy-ficazione (vs. Fuzzy-ficazione)

- I metodo più affidabile è il *centro di gravità*.
- Si calcola y_{defuz} come l'ascissa del baricentro della figura geometrica che rappresenta il fuzzy set di uscita

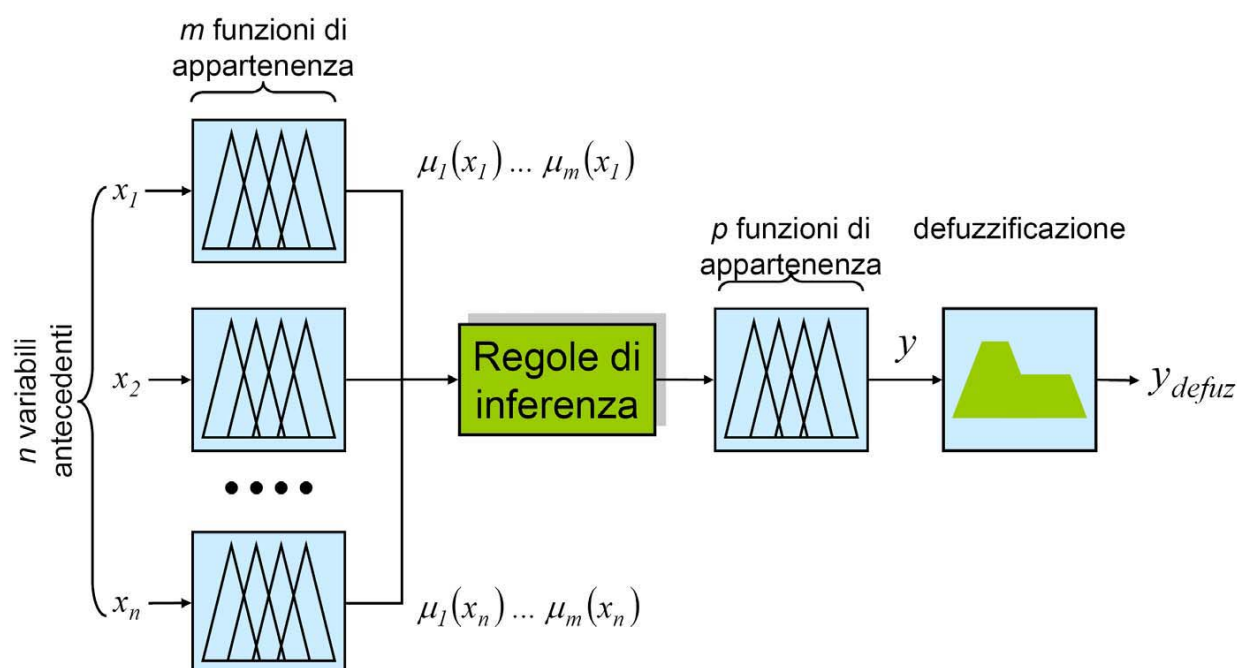


$$y_{defuz} = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

28

Introduzione alla Logica Fuzzy

Inferenza Fuzzy - Riepilogo



29

Introduzione alla Logica Fuzzy

Inferenza Fuzzy “alla Sugeno”

- Il costrutto logico è lo stesso, con antecedenti fuzzy e le medesime regole di composizione, ma il conseguente è un singolo valore deterministico (*singleton*)

IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 THEN $y = k$

Valore assunto dall'uscita in funzione del grado di verità dell'antecedente

- Viene eliminato il problema della defuzzificazione: basterà effettuare la media dei vari singleton pesata con i gradi di verità degli antecedenti;
- E' immediata l'estensione a conseguenti più complessi, come funzioni lineari o più in generali a funzione a base radiale (approssimatori universali)

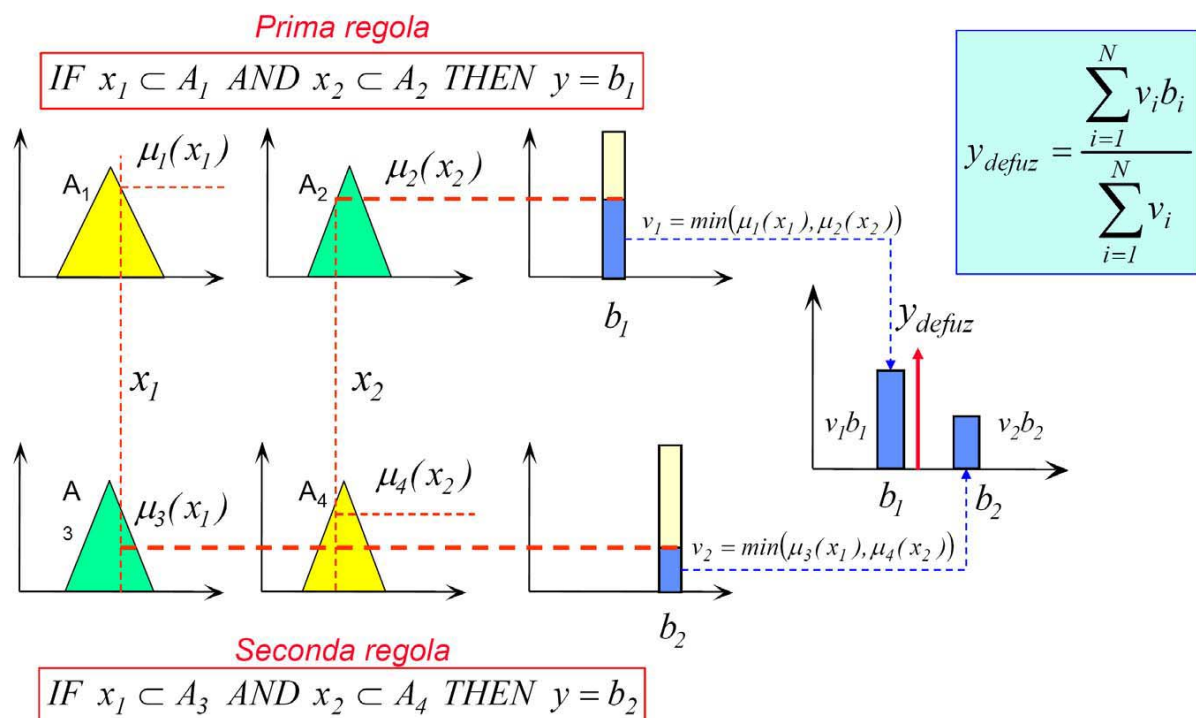
IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 THEN $y = f(x_1, x_2)$

- Si apre così la strada ad un ricongiungimento fra la teoria dei sistemi "classica" ed il mondo fuzzy.

30

Introduzione alla Logica Fuzzy

Implicazione “alla Sugeno”



31

Introduzione alla Logica Fuzzy

Riferimenti Bibliografici

- ➡ Yager R.R. e Filev D.P. (1994) *Essentials of Fuzzy Modelling and Control*, Wiley
- ➡ Babuska R. (1998) *Fuzzy Modelling for Control*, Kluwer
- ➡ Wang, L. X. (1994) *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, PTR Prentice Hall
- ➡ R. Jager.(1995) *Fuzzy Logic in Control*. Thesis Technische Universiteit Delft. Disponibile on-line:
[ftp://195.214.211.1/books/DVD-030/Jager_M._Fuzzy_Logic_in_Control_\(1995\)_en_\(322s\).pdf](ftp://195.214.211.1/books/DVD-030/Jager_M._Fuzzy_Logic_in_Control_(1995)_en_(322s).pdf)

32

Introduzione alla Logica Fuzzy