



Introduzione alla Logica Fuzzy

*"Ragionamento approssimato con
concetti definiti in modo vago"*

Presenter: Dott. Ing. SIMANI SILVIO

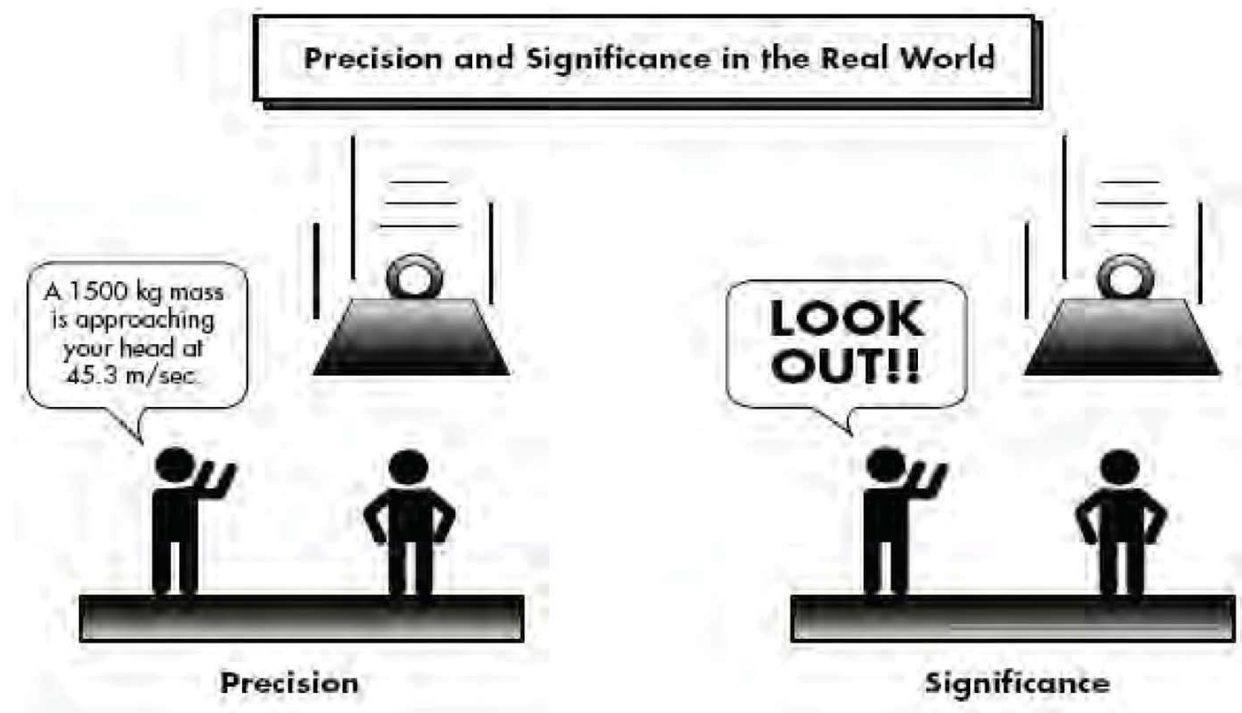
con supporto di
Dott. Ing. MARCELLO BONFE'

Ringraziamenti



- ➡ Le dispense sono prese dal corso del Prof.
Stefano Marsili-Libelli: Introduzione ai Fuzzy Sets.
Dipartimento di Sistemi e Informatica Facoltà di
Ingegneria Via S.Marta, 3. 50139 Firenze. Home
page: <http://dsi.ing.unifi.it/~marsili/>

Esempio: Precisione o Significato?

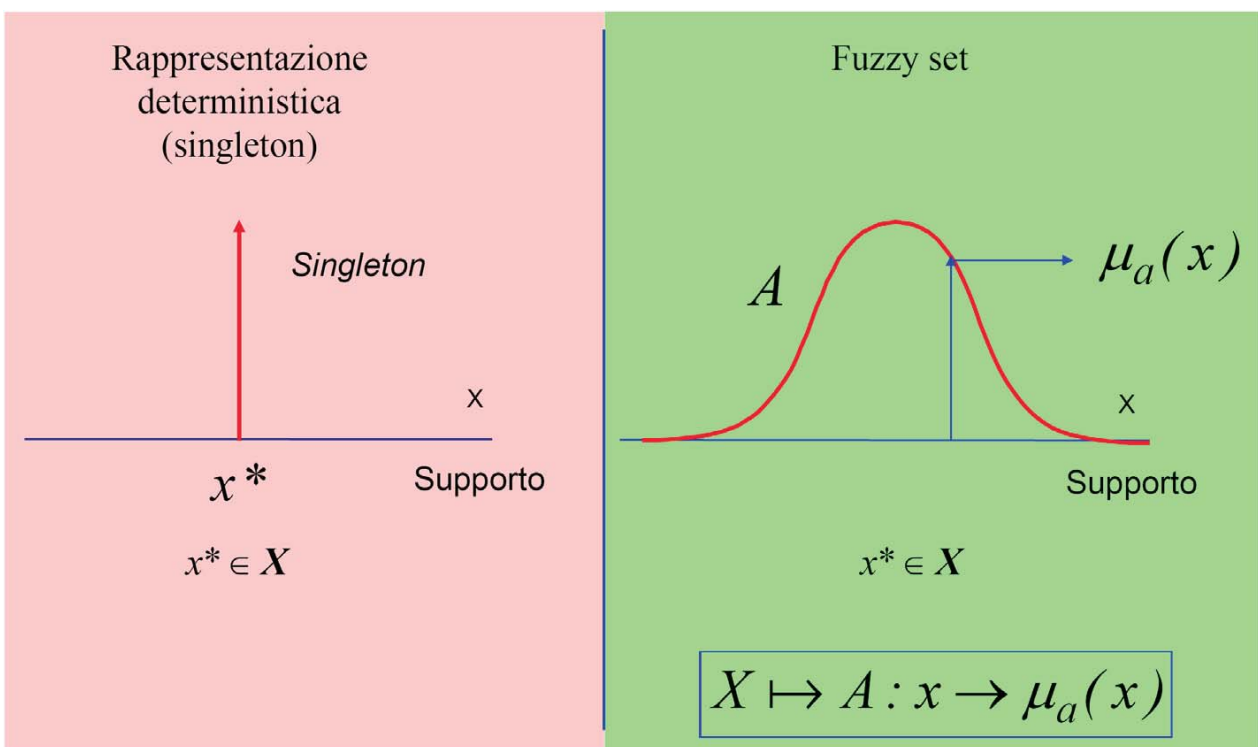


21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

3

Valori “Crisp” e Fuzzy Sets

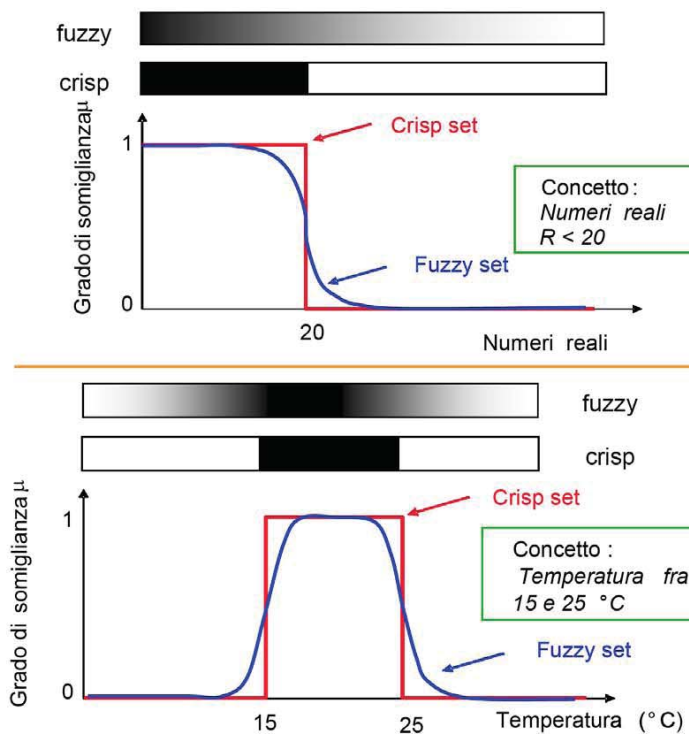


21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

4

Logica Fuzzy e “Grado di Appartenenza”



Il ragionamento “crisp” opera solamente con i concetti di **uguale** o **diverso** (non uguale)

Il ragionamento “fuzzy” introduce la nozione di **“grado di somiglianza”** come appartenenza di un concetto ad un **prototipo** predefinito che ha la funzione di termine di paragone

Perciò il risultato hard vero/falso si “ammorbidisce” nel grado di appartenenza, che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1 con continuità

Le **curve blu** rappresentano i **prototipi** corrispondenti ai concetti espressi nelle scatole verdi

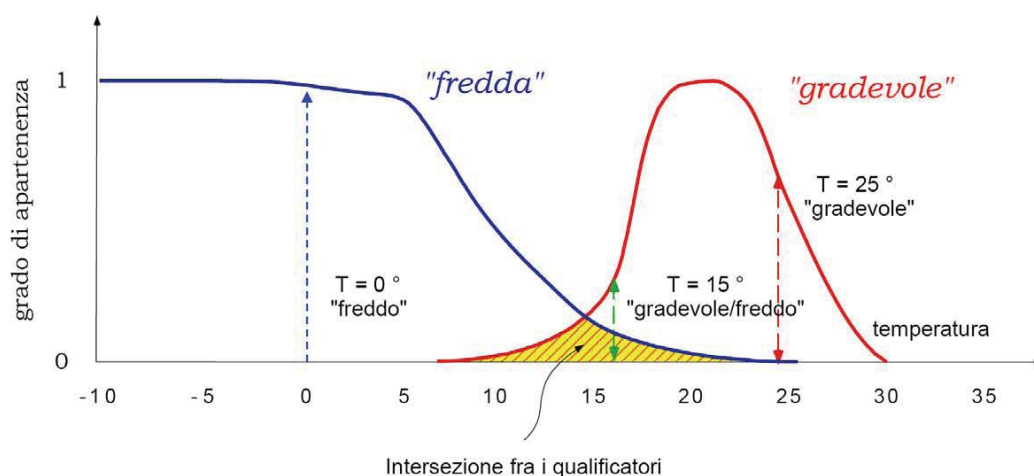
21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

5

Qualificatori e Grado di Appartenenza

Dato l'insieme di supporto delle temperature ambientali definire i qualificatori di temperatura “gradevole” e “fredda”



- Ciascun qualificatore deve valere 1 per almeno un valore del supporto (**Normalità**)
- L'insieme dei qualificatori deve coprire l'intero supporto (**Completezza**)
- Ci possono essere delle sovrapposizioni (**Ambiguità**)

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

6

Logica Fuzzy e Probabilità: Confronto

La Fuzziness esprime il grado di verità di un oggetto rispetto ad un concetto predefinito, basato su una *esperienza diretta*, mentre la probabilità esprime *l'eventualità* che un evento futuro possa o non possa accadere.



Bezdek, 1991



A: Potabile con fuzziness = 0.9

Da quale bottiglia preferireste bere?



B: Potabile con probabilità = 0.9

Il contenuto della bottiglia è “simile” ad acqua potabile con “somiglianza pari a 90%. Questa è un'affermazione basata su una *reale confronto* fra il contenuto di *quella* bottiglia ed un'acqua potabile di riferimento. Questa è una certezza!

C'è una probabilità su 10 che il contenuto della bottiglia *NON* sia potabile !!!
Questa è un'affermazione basata su un test statistico, che basandosi *induttivamente* su un gran numero di test (*ma non su quella bottiglia!*), tenta di inferire il contenuto di quella bottiglia. Non c'è alcuna certezza circa il reale contenuto di *quella* bottiglia!

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

7

Insiemi Fuzzy: Definizioni di Base

☞ **Supporto:** l'intervallo $X \in \mathcal{R}$ di interesse per la variabile indipendente x

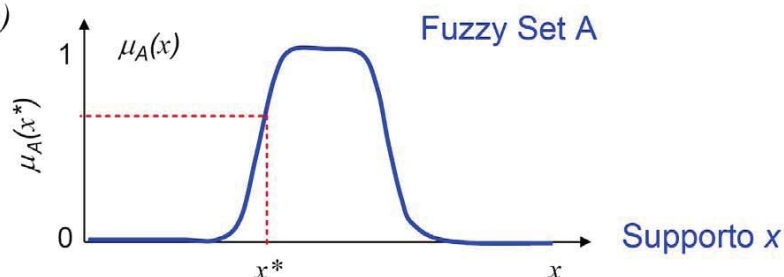
☞ **Funzione di appartenenza:** la funzione $\mu(x)$ che fornisce il *grado di verità* per ciascun valore di $x \in X$. Tale funzione definisce operativamente il fuzzy set A come

$$A = \{\mu_A(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$

☞ Il fuzzy set generalizza il concetto di appartenenza (*grado di verità*) graduandolo attraverso la funzione di appartenenza $\mu(x)$

☞ Dato un supporto X , un fuzzy set A su X è definito dalla funzione di appartenenza $\mu(x)$ che associa ciascun elemento di $x \in X$ ad un grado di verità associato al Fuzzy Set A attraverso $\mu(x)$

Funzione di appartenenza
 $\mu(x)$



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

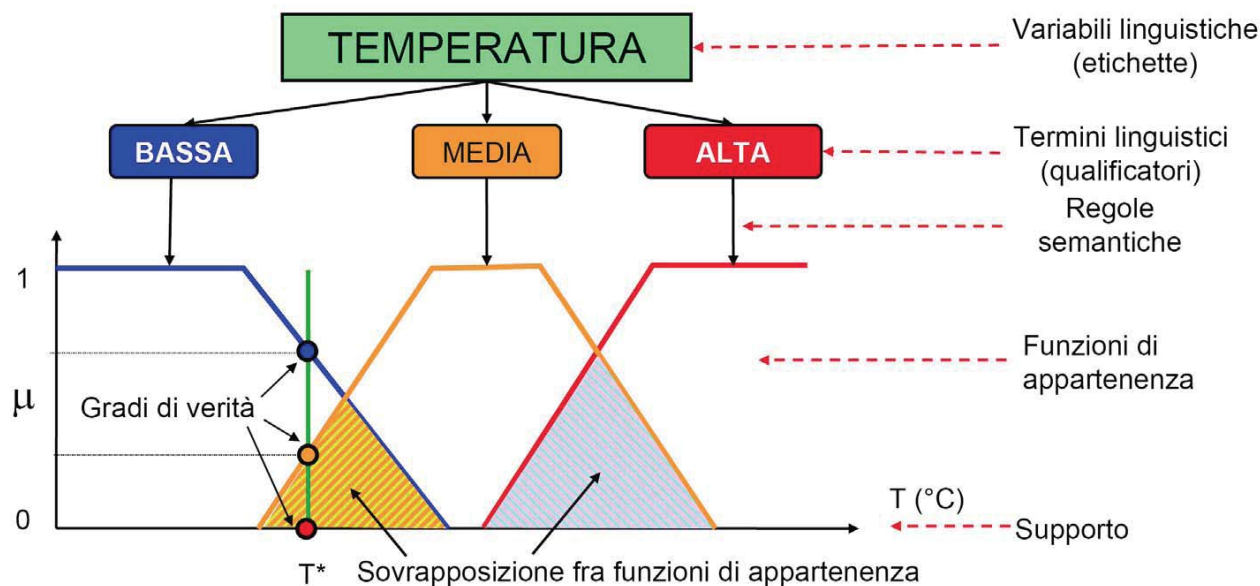
8

Variabili Linguistiche

Una variabile linguistica è un'etichetta che definisce un concetto.

Ad essa corrisponde una funzione di appartenenza (qualificatore).

Esso determina il grado di verità μ di un qualsiasi valore del supporto.



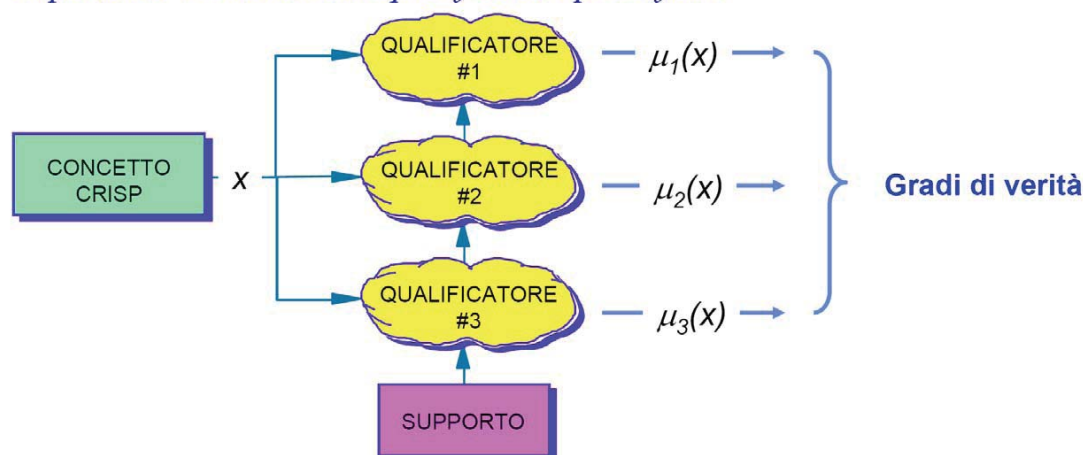
21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

9

"Fuzzy-ficazione"

Consiste nella determinazione dei gradi di verità di un dato concetto rispetto ad un insieme di qualificatori predefiniti



Il risultato della fuzzificazione è un vettore contenente i gradi di verità del concetto rispetto ai qualificatori

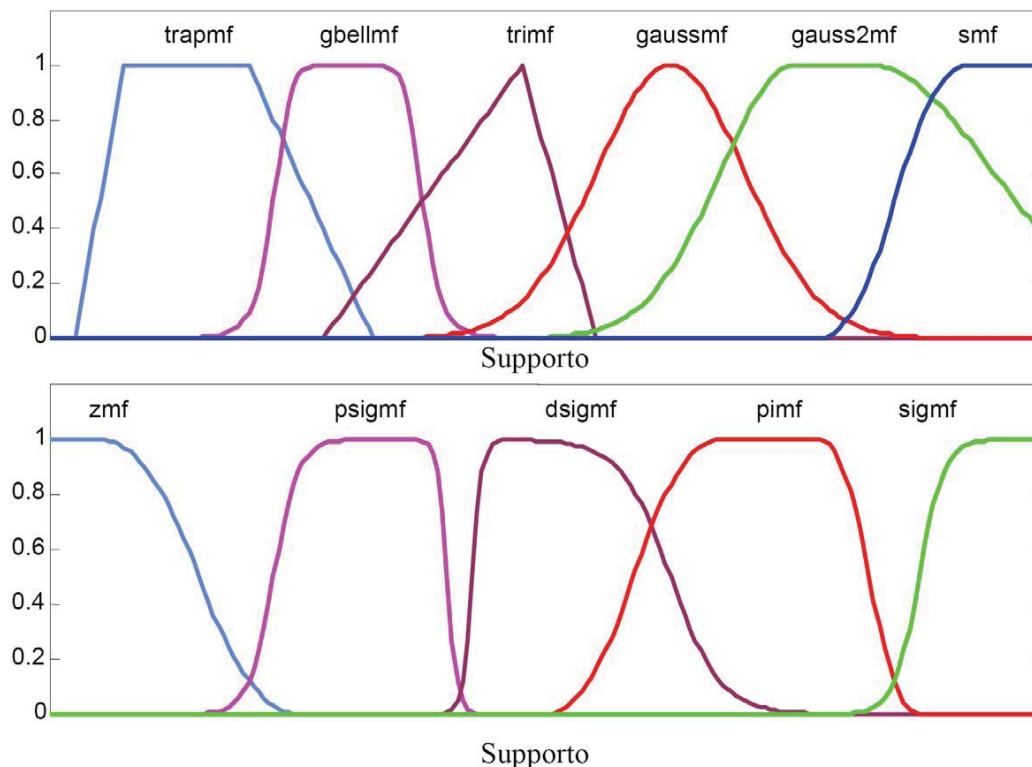
$$x \xrightarrow{\text{fuzzificazione}} [\mu_1(x) \quad \mu_2(x) \quad \mu_3(x)]$$

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

10

I Qualificatori nel Fuzzy Logic Toolbox™



21/10/2011

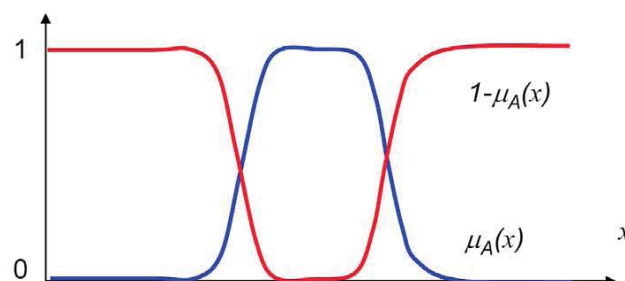
Introduzione alla Logica Fuzzy

11

Proprietà degli Insiemi Fuzzy

👉 **Insieme complemento:** il fuzzy set con funzione di appartenenza complementare rispetto a μ

$$\bar{A} : \{\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$



👉 **Normalità:** se esiste almeno un elemento di $x \in X$ tale che $\mu(x) = 1$

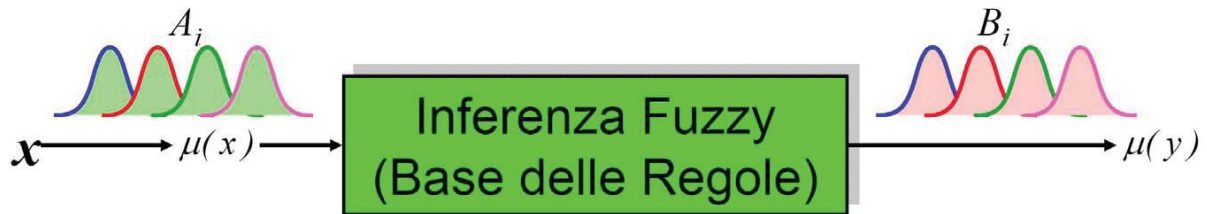
👉 **Completezza:** dato un insieme di fuzzy set $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ definiti tramite le funzioni di appartenenza $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ su un supporto $X \in \mathcal{R}$, tale insieme dicesi **completo** se per un qualsiasi $x \in X$ esiste almeno una funzione di appartenenza nell'insieme $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ diversa da zero.

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

12

Logica Fuzzy: Regole di Inferenza



Regola di inferenza $R_i : IF \underbrace{x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2}_{\text{antecedente}} THEN \underbrace{y \text{ is } B}_{\text{conseguente}}$

- ☞ Alla base della logica fuzzy stanno le regole di inferenza
- ☞ Più predicati fuzzy possono essere **connessi** fra loro (**AND**)
- ☞ Dato un predicato **antecedente**, la sua verità implica (**THEN**) quella del predicato **conseguente**
- ☞ Vanno definiti gli operatori logici di **connessione** fra concetti fuzzy e di **implicazione** fra antecedente e conseguente

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

13

Operatori Fuzzy: Norme Triangolari -> Connettivi AND

$$T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

☞ L'operatore $T(.,.)$ ha le seguenti proprietà

- ☞ Limitatezza $T(0,0) = 0; T(a,1) = T(1,a) = a$ *Prevale il più piccolo*
- ☞ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,c)$
- ☞ Commutatività $T(a,b) = T(b,a)$
- ☞ Associatività $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

Possibili t -norme

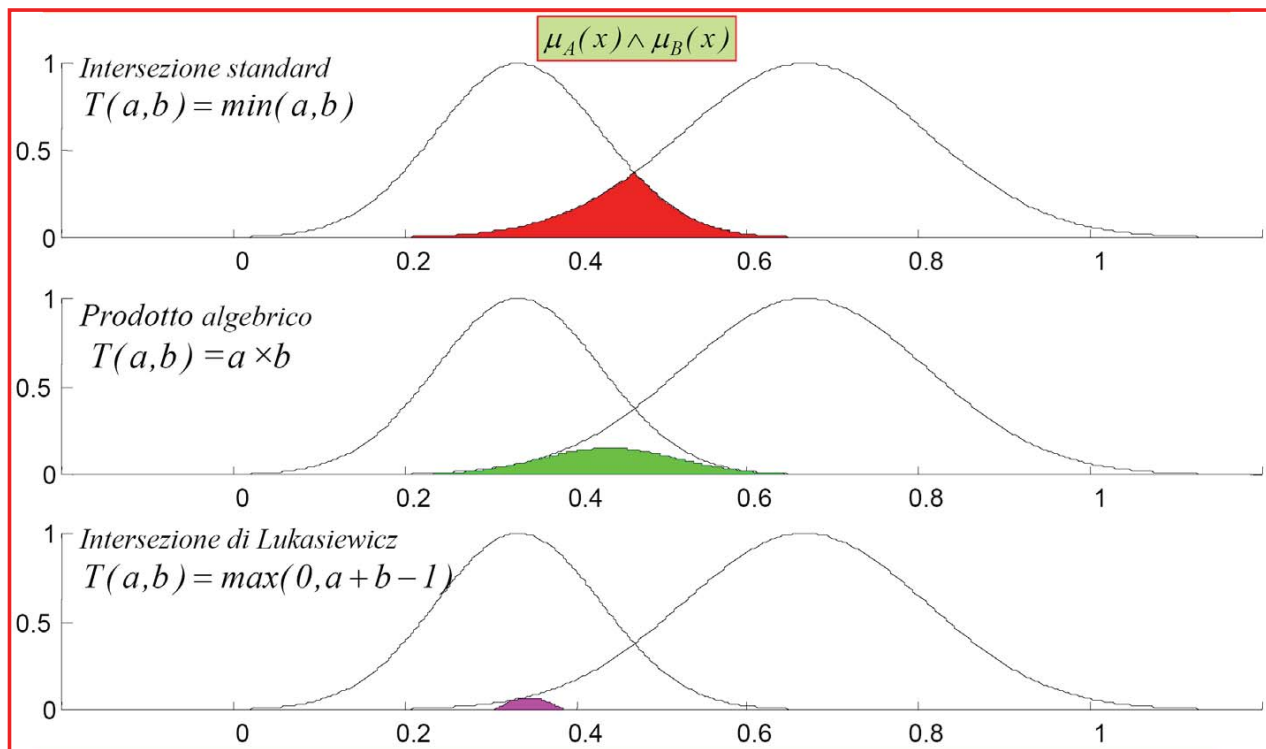
Intersezione standard	$T(a,b) = \min(a,b)$
Prodotto algebrico	$T(a,b) = a \times b$
Intersezione di Lukasiewicz	$T(a,b) = \max(0, a + b - 1)$

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

14

Esempi di T-norm



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

15

Operatori Fuzzy: S-norme Triangolari -> Connettivi OR

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

👉 L'operatore $S(.,.)$ ha le seguenti proprietà

- ⇒ Limitatezza $S(1, 1) = 1; S(a, 0) = S(0, a) = a$ *Prevale il più grande*
- ⇒ Monotonicità $b \leq c \Rightarrow S(a, b) \leq S(a, c)$
- ⇒ Commutatività $S(a, b) = S(b, a)$
- ⇒ Associatività $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

Possibili s-norme

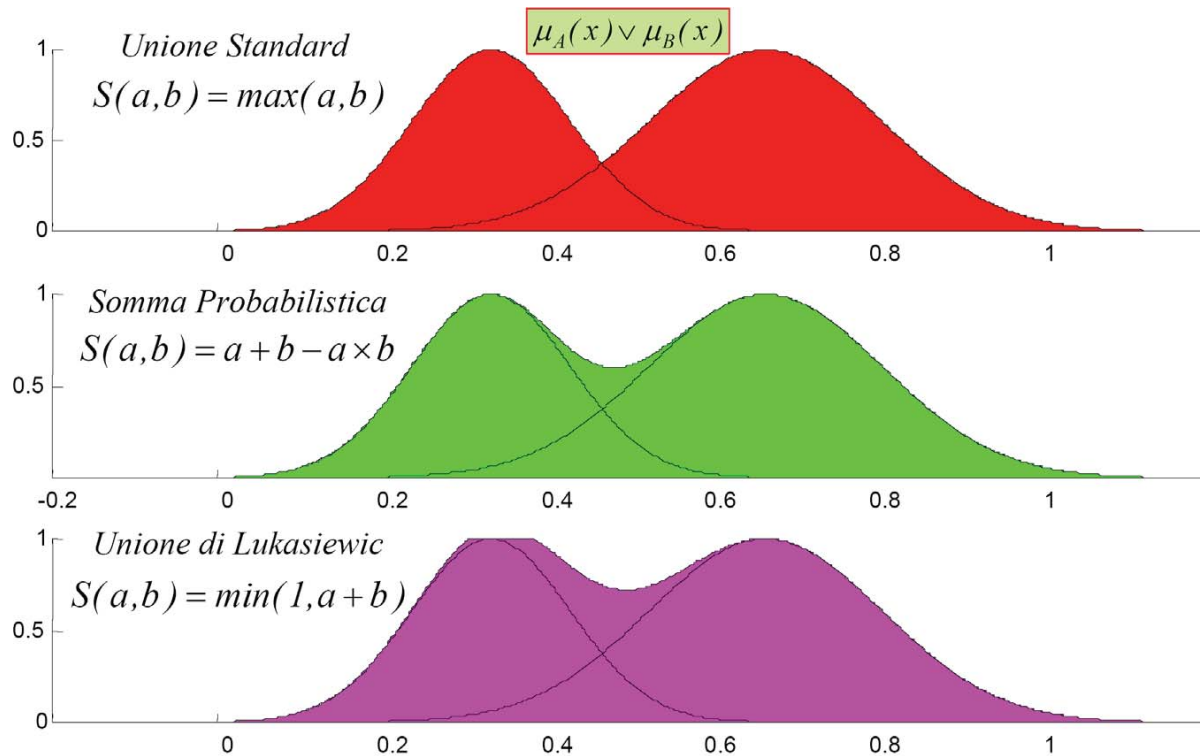
$$\begin{cases} \text{Unione Standard} & S(a, b) = \max(a, b) \\ \text{Somma Probabilistica} & S(a, b) = a + b - a \times b \\ \text{Unione di Lukasiewicz} & S(a, b) = \min(1, a + b) \end{cases}$$

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

16

Esempi di S-norm



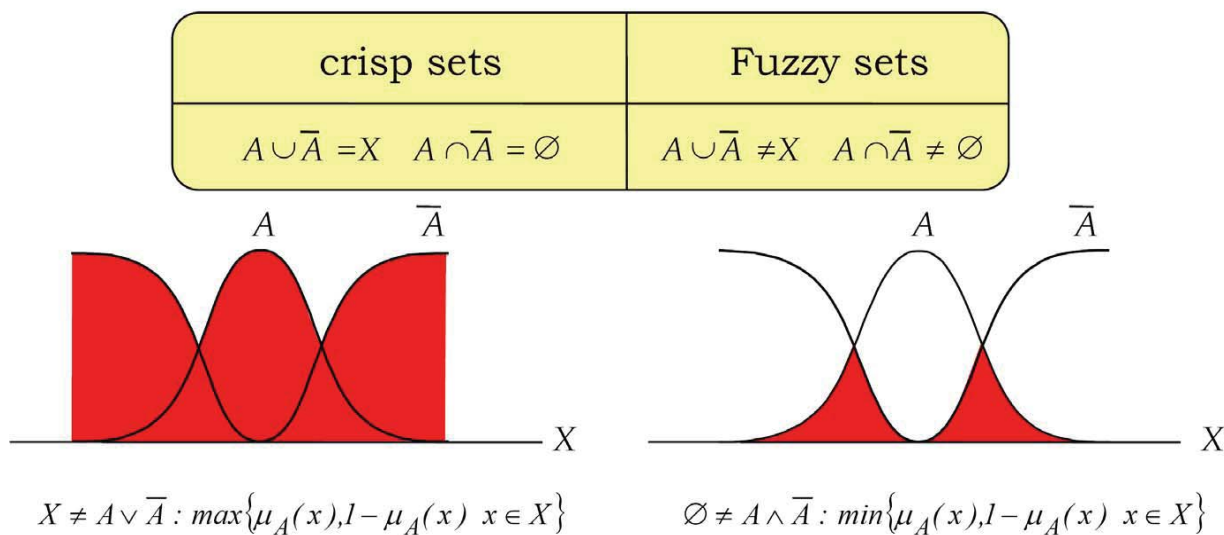
21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

17

Insiemi Crisp e Insiemi Fuzzy: Confronto

Non valgono le proprietà della logica classica



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

18

Implicazione Fuzzy: Logica Deduttiva

- ☞ La logica fuzzy è **deduttiva**, nel senso che condiziona la verità del *conseguente* a quella dell'*antecedente*

$$\begin{array}{ccc} \text{IF} & x \text{ is } A & \text{THEN } y \text{ is } B \\ & \text{antecedente} & \text{conseguente} \end{array}$$

- ☞ La notazione $x \text{ is } A$ va intesa come il grado di appartenenza di x al fuzzy set A , ovvero operativamente

$$x \text{ is } A \rightarrow \mu_A(x)$$

- ☞ Analogamente per il conseguente $y \text{ is } B$ va intesa come il grado di appartenenza del conseguente y al fuzzy set B

$$y \text{ is } B \rightarrow \mu_B(y)$$

- ☞ Il problema nuovo rispetto alle precedenti operazioni è che in generale A e B sono definiti su due supporti diversi X e Y !!!
- ☞ Perciò va definito un nuovo operatore: **l'Implicazione fuzzy** che condiziona il grado di verità del conseguente con quello dell'*antecedente*

Implicazione Fuzzy – Esempi

- ☞ L'implicazione

$$R : \text{IF } x \text{ is } A \text{ THEN } y \text{ is } B$$

- ☞ Opera sul prodotto cartesiano fra gli spazi di ingresso (X) e uscita (Y)

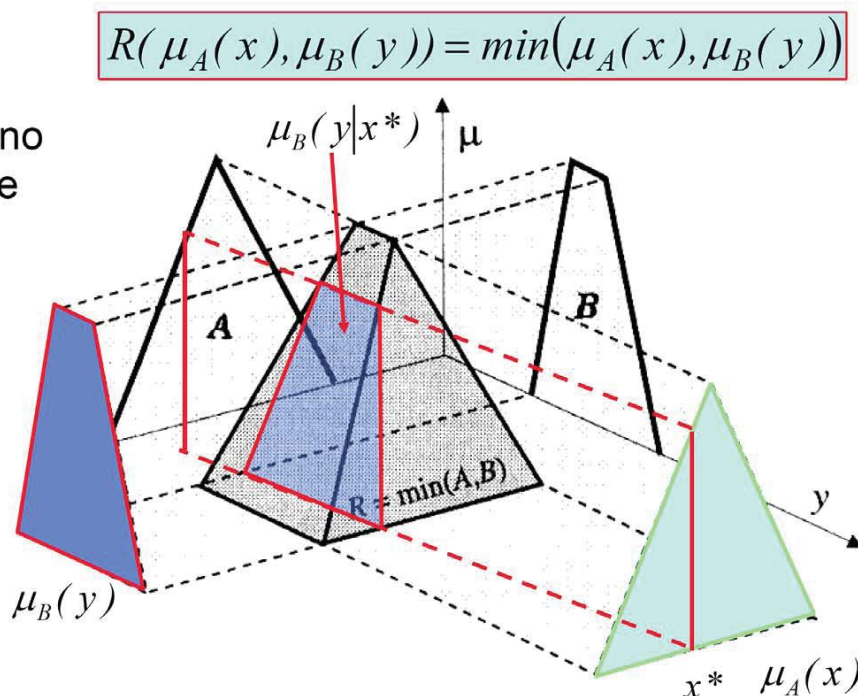
$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

- ☞ Il grado di appartenenza del conseguente è dato dall'operatore di implicazione (THEN), che si realizza con una t -norma

- ☞ Possibili operatori di implicazione t -norme
- $$R : \begin{cases} \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) & \text{Lukasiewicz} \\ \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Kleene} \\ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Mamdani} \\ \mu_A(x) \times \mu_B(y) & \text{Prodotto} \end{cases}$$

“Superficie” di Implicazione Fuzzy – Esempio

L'implicazione fuzzy opera sul prodotto cartesiano dei due supporti e produce una **superficie** di inferenza che rappresenta la relazione fra ingresso (antecedente) e uscita (conseguente)



Implicazione Fuzzy – Regole

$$R : IF \ x \text{ is } A \text{ THEN } y \text{ is } B$$

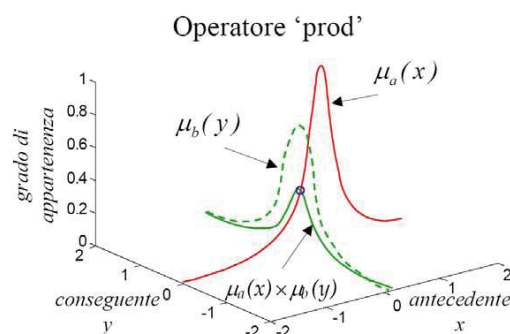
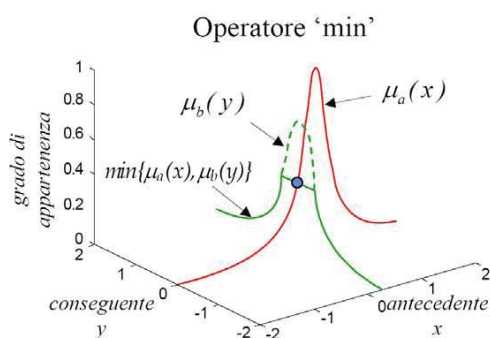
$$S : A \times B \rightarrow \mu_s(x, y) = \mu_a(x) \wedge \mu_b(y) = \begin{cases} \min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\} & x \in X \\ \mu_a(x) \times \mu_b(y) & y \in Y \end{cases}$$

Prodotto Cartesiano
dei due insiemi fuzzy

Connettivo
di implicazione

Possibili
operatori

L'antecedente condiziona il grado di appartenenza del conseguente



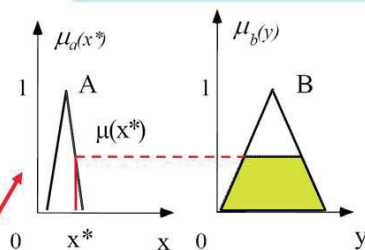
Implicazione con 1 Antecedente

IF x is A THEN y is B

$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \wedge \mu_b(y)$$

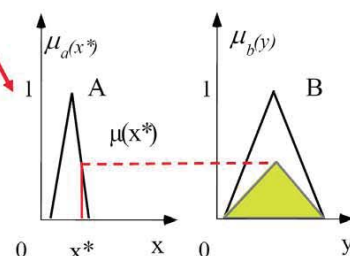
Composizione
'min'

$$x \text{ is } A \Rightarrow \mu_a(x)$$



$$\mu_b(y) = \min(\mu_a(x^*), \mu_b(y))$$

Composizione
'prod'

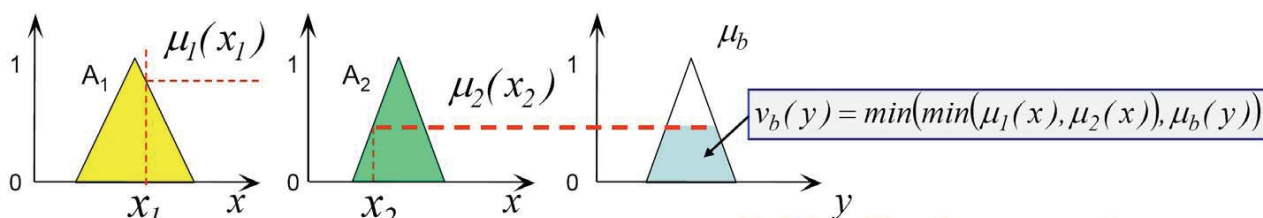


$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \times \mu_b(y)$$

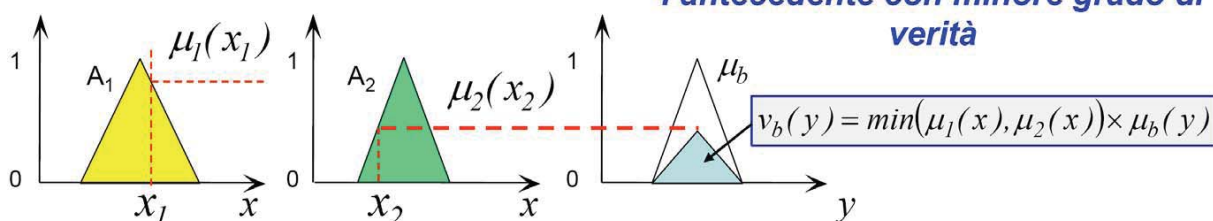
Implicazione con più Antecedenti – Esempio

IF $(x_1 \text{ is } A_1) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_2) \text{ THEN } y \text{ is } B$

$$\mu_b(y) = (\mu_1(x^*) \wedge \mu_2(x^*)) \wedge \mu_b(y)$$



**Nell'implicazione prevale
l'antecedente con minore grado di
verità**



Inferenza Fuzzy - Algoritmo

- In genere una sola regola fuzzy non è sufficiente per definire l'intero concetto che vogliamo esprimere
- Si usano allora più regole, connesse fra di loro con il predicato ELSE
- Esempio: si considerino due regole

$R_1 : IF (x_1 \text{ is } A_{11}) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_{21}) \text{ THEN } y \text{ is } B_1$
ELSE

$R_2 : IF (x_1 \text{ is } A_{12}) \text{ AND } (x_2 \text{ is } A_{22}) \text{ THEN } y \text{ is } B_2$

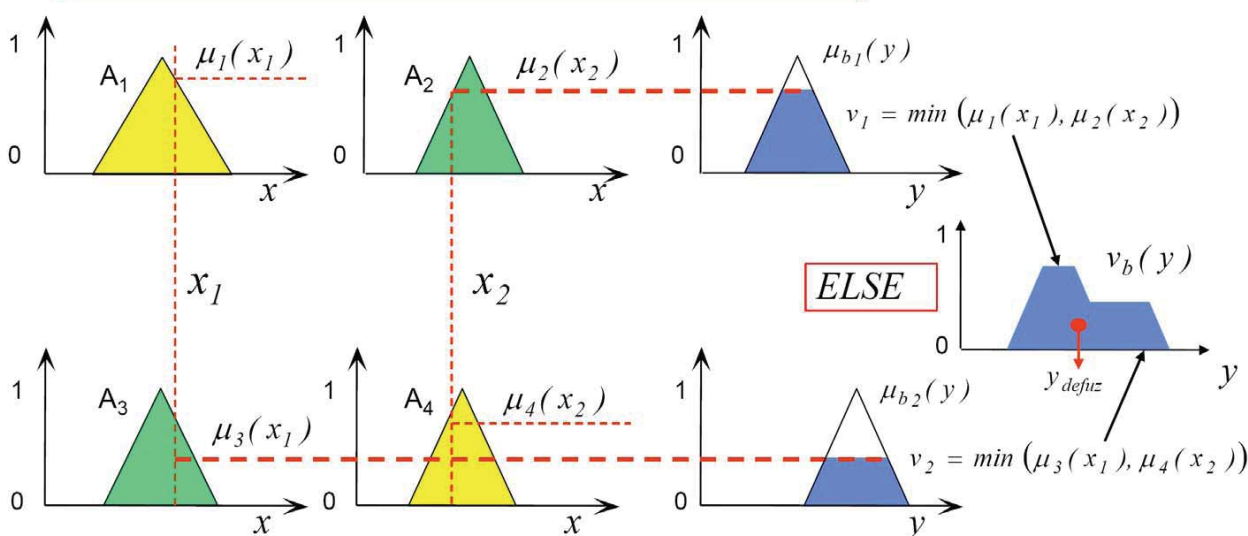
In questo caso si considera l'alternativa fra le somiglianze di x_1 a A_{11} o A_{12} e di x_2 a A_{21} o A_{22} . Ciascun antecedente mappa il conseguente in B_1 o B_2 in funzione del proprio grado di verità

- Tale connettivo rappresenta il grado di alternativa delle singole regole e viene perciò realizzato con un operatore s-norma ($\vee$)

Esempio di Composizione di 2 Regole

Prima regola

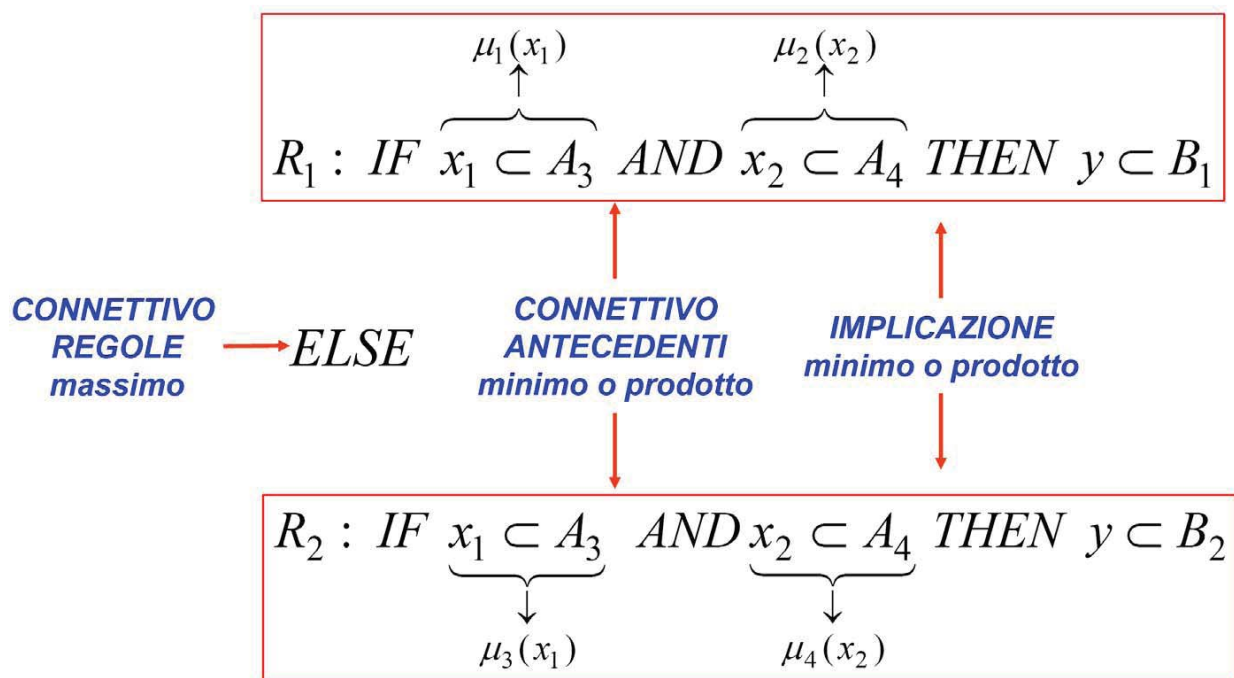
$IF x_1 \subset A_1 \text{ AND } x_2 \subset A_2 \text{ THEN } y \subset B_1$



Seconda regola

$IF x_1 \subset A_3 \text{ AND } x_2 \subset A_4 \text{ THEN } y \subset B_2$

Connettivi dell'Inferenza Fuzzy



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

27

Inferenza con m Regole e n Antecedenti



m regole

n antecedenti

$R_l : IF (x_l \text{ is } A_{l,1}) AND \dots AND (x_n \text{ is } A_{l,n}) THEN (y \text{ is } B_l)$
ELSE

 $R_m : IF (x_l \text{ is } A_{m,1}) AND \dots AND (x_n \text{ is } A_{m,n}) THEN (y \text{ is } B_m)$

$$A_{j,i} \rightarrow \mu_{j,i}(x) \quad B_j \rightarrow \mu_{b_j}(y)$$

$$\mu_b(y) = \bigcup_{j=1}^m \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^n \mu_{j,i}(x^*) \right) \wedge \mu_{b_j}(y) \right\}$$

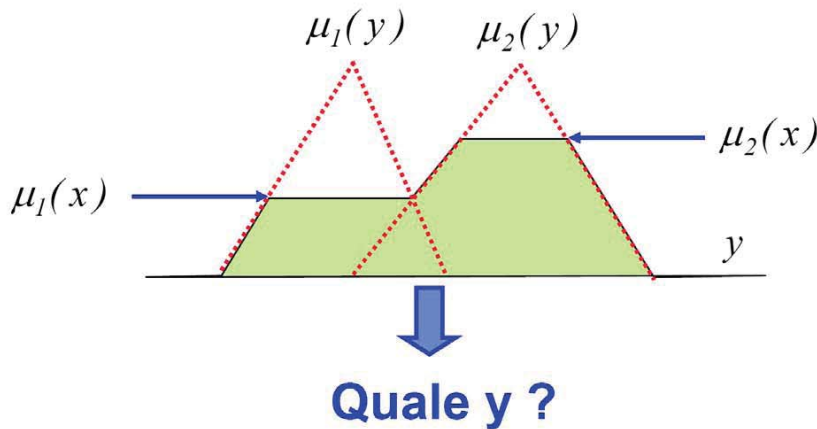
21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

28

La De-fuzzy-ficazione – “Interfaccia Esterna”

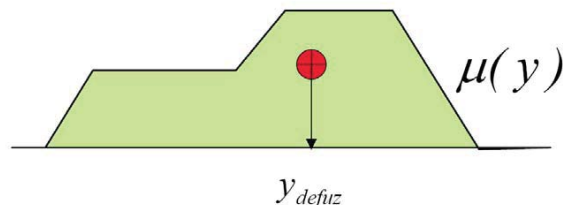
- Il risultato dell'inferenza fuzzy è un fuzzy set ottenuto per unione (S-norma) dei risultati delle singole inferenze



- Il Fuzzy Set colorato in verde rappresenta l'uscita dell'inferenza in termini fuzzy, ma come far corrispondere a questo un *singolo valore crisp di y* rappresentativo dell'inferenza?

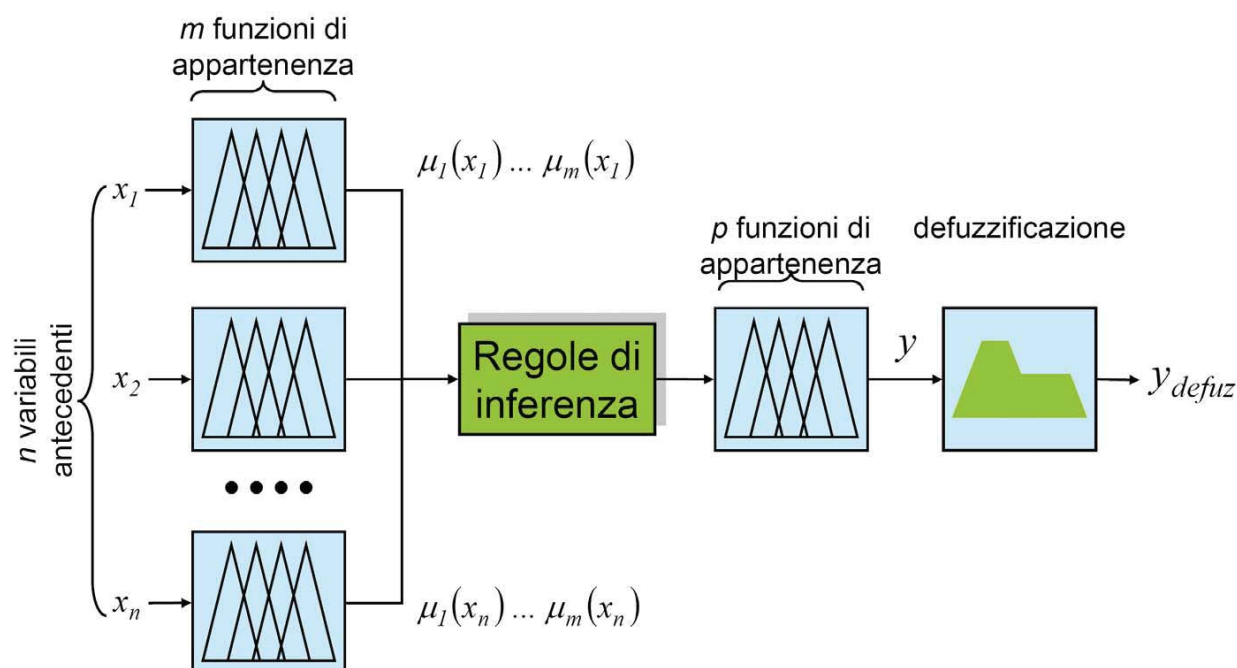
De-fuzzy-ficazione (vs. Fuzzy-ficazione)

- I metodo più affidabile è il *centro di gravità*.
- Si calcola y_{defuz} come l'ascissa del baricentro della figura geometrica che rappresenta il fuzzy set di uscita



$$y_{defuz} = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

Inferenza Fuzzy - Riepilogo



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

31

Inferenza Fuzzy “alla Sugeno”

- Il costrutto logico è lo stesso, con antecedenti fuzzy e le medesime regole di composizione, ma il conseguente è un singolo valore deterministico (*singleton*)

IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 THEN $y = k$

Valore assunto dall'uscita in funzione del grado di verità dell'antecedente

- Viene eliminato il problema della defuzzificazione: basterà effettuare la media dei vari singleton pesata con i gradi di verità degli antecedenti;
- E' immediata l'estensione a conseguenti più complessi, come funzioni lineari o più in generali a funzione a base radiale (approssimatori universali)

IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 THEN $y = f(x_1, x_2)$

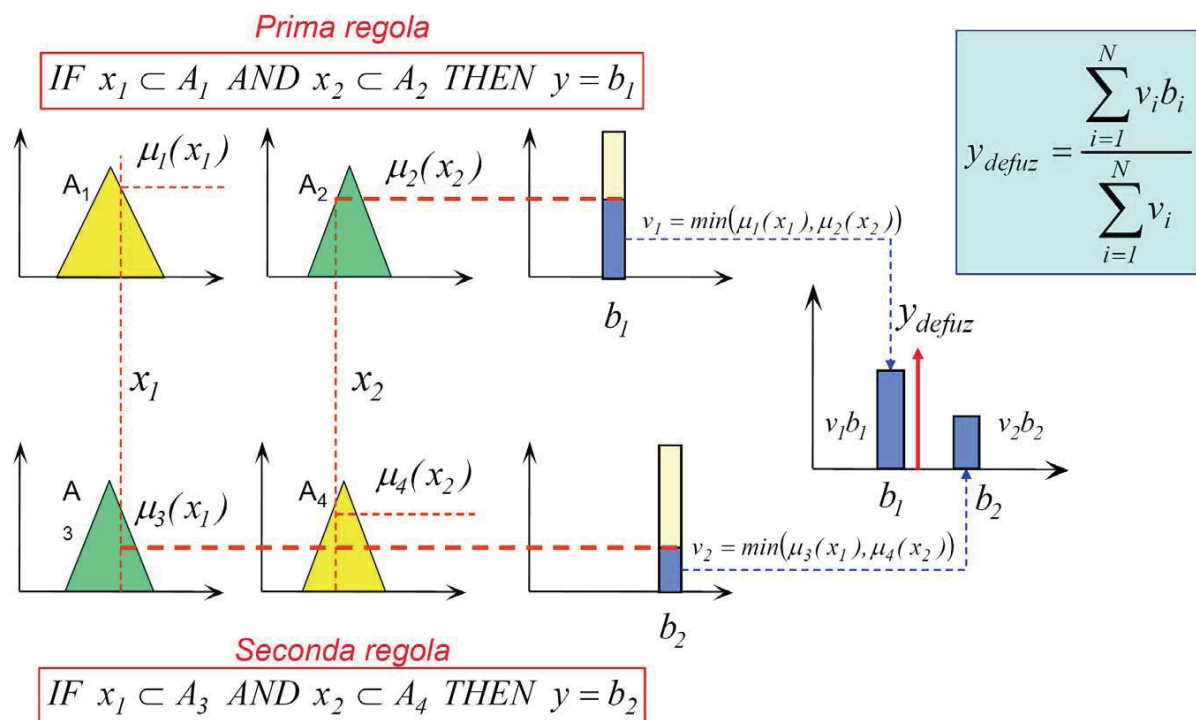
- Si apre così la strada ad un ricongiungimento fra la teoria dei sistemi "classica" ed il mondo fuzzy.

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

32

Implicazione “alla Sugeno”



21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

33

Riferimenti Bibliografici

- ➡ Yager R.R. e Filev D.P. (1994) *Essentials of Fuzzy Modelling and Control*, Wiley
- ➡ Babuska R. (1998) *Fuzzy Modelling for Control*, Kluwer
- ➡ Wang, L. X. (1994) *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, PTR Prentice Hall
- ➡ R. Jager. (1995) *Fuzzy Logic in Control*. Thesis Technische Universiteit Delft. Disponibile on-line:
[ftp://195.214.211.1/books/DVD-030/Jager_M._Fuzzy_Logic_in_Control_\(1995\)_en_\(322s\).pdf](ftp://195.214.211.1/books/DVD-030/Jager_M._Fuzzy_Logic_in_Control_(1995)_en_(322s).pdf)

21/10/2011

Introduzione alla Logica Fuzzy

34