TECNICHE DI CONTROLLO E DIAGNOSI

Richiami di Teoria dei Sistemi

Dott. Ing. SIMANI SILVIO

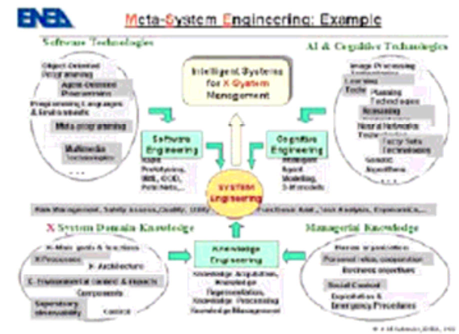
con supporto del

Dott. Ing. BONFE' MARCELLO

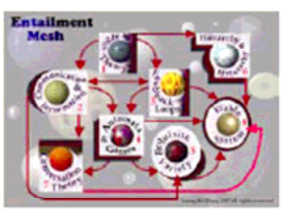
Sistemi e Modelli

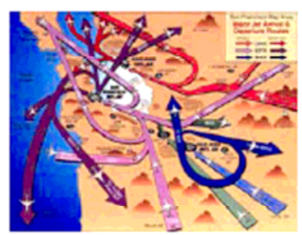
Da diversi anni, i termini:

- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- ...



sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse: controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia, gestione aziendale, gestione traffico, ...



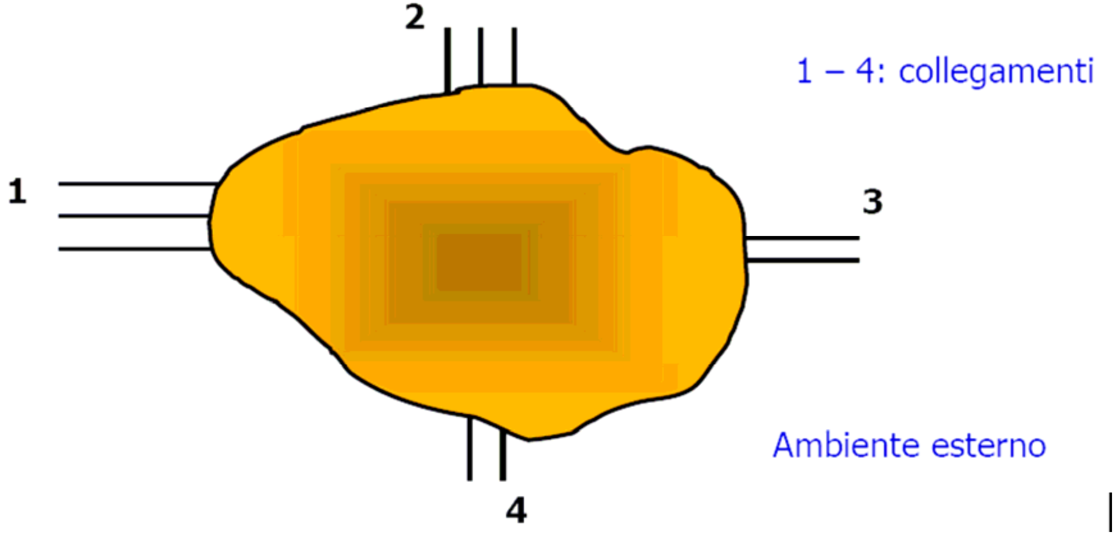


Sistema: "elemento" comune in questa terminologia

➡ Necessità di definire e studiare le *proprietà strutturali* dei "sistemi"

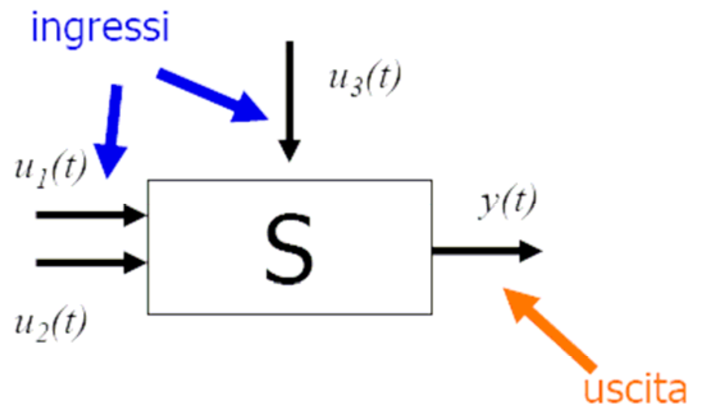
Concetto di Sistema

- **Sistema:** insieme, artificialmente isolato dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comporamento
- **Attributo misurabile**: caratteristica che può essere messa in relazione con un insieme di simboli o numeri (interi, reali, complessi)
- **Modello matematico**: equazioni che descrivono le relazioni tra gli attributi misurabili.



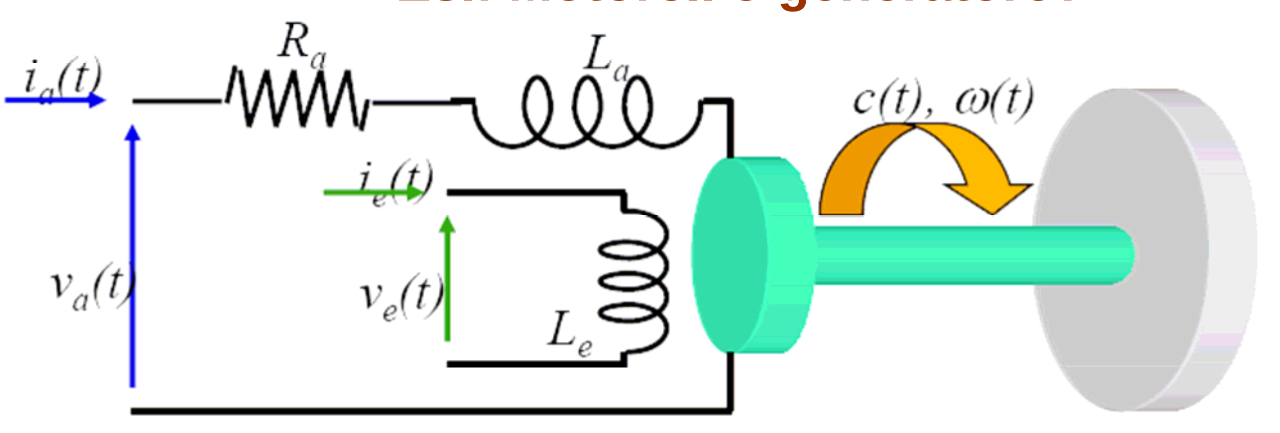
Causa → Effetto

- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in
  - Variabili di ingresso (cause)
  - Variabili di uscita (effetti)



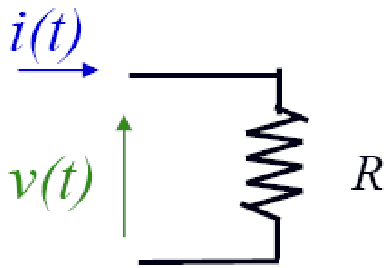
- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca

Es.: Motore.. o generatore?

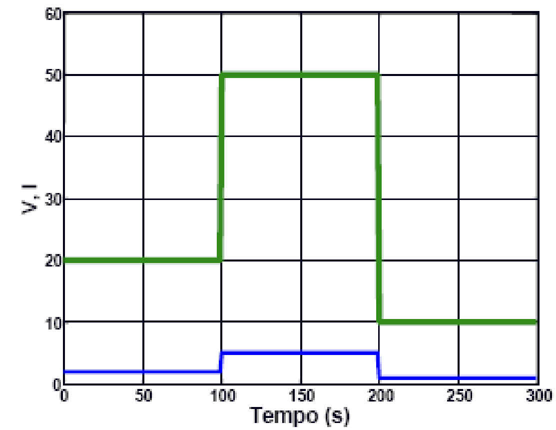


Sistemi e Dinamica

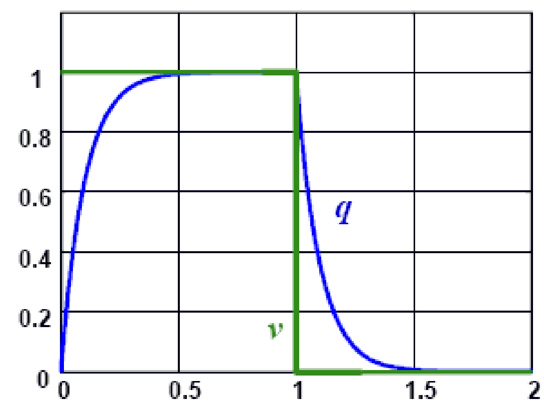
- Sistema statico (algebrico)

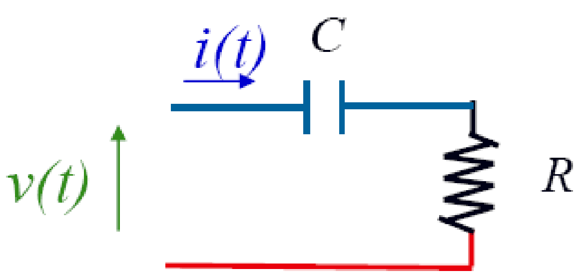


$$v(t) = R\, i(t)$$



- Sistema dinamico



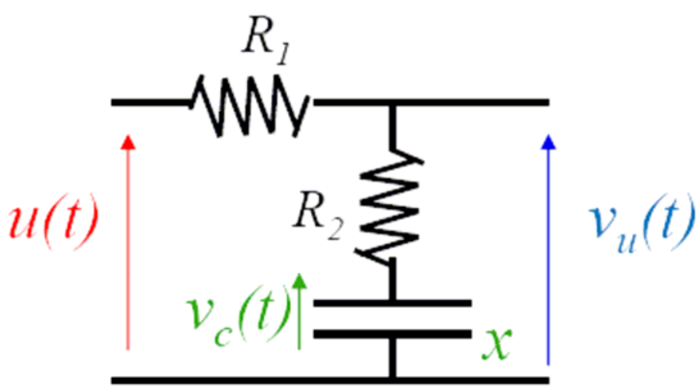


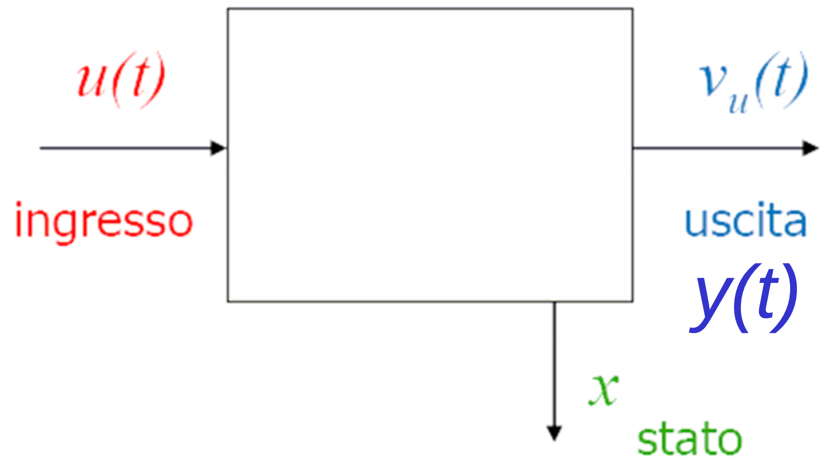
$$v(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

Sistemi e Dinamica

- ***Sistemi dinamici:*** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono ***anche*** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).

- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)





Considerazioni “energetiche”

- Lo **stato** è l’informazione sulla “situazione interna” di un sistema, necessaria per predire l’effetto della sua storia passata sul suo comportamento futuro.
- Lo **stato** nei sistemi fisici è determinato dall’**accumulo di energia** (quantità di moto, energia potenziale, carica elettrica, ecc.)
- La scelta delle variabili di stato per la modellazione matematica è comunque **arbitraria e non univoca!**

Considerazioni “energetiche”

- In ogni dominio fisico ci sono sempre **UNO o DUE** elementi che caratterizzano l’accumulo di energia
  - **Elettrico**: capacità (C) e induttanza (L)
  - **Meccanico traslante**: massa (M) e reciproco della rigidità (1/K)
  - **Meccanico rotante**: momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
  - **Fluidico**: capacità fluidica (Cf) e induttanza fluidica (Lf)
  - **Termico**: capacità termica (Ct)

Considerazioni "energetiche"

dominio	accumulo "capacitivo"	accumulo "induttivo"
elettrico	$E = \frac{1}{2} C v^2$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
meccanico traslante	$E = \frac{1}{2} M v^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} f^2$
meccanico rotante	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} c^2$
idraulico/pneumatico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
termico	$E = C_t T$	manca

l'energia accumulata dipende dalle → **variabili ai morsetti** — **variabili passanti**

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \ldots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- ***Stato***: $x(t) \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X}=R^n$
- ***Ingresso:*** $u(t) \in \mathbf{U}$, $\mathbf{U}=R^m$
- ***Uscita:*** $y(t) \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}=R^p$

all' istante $t \in \mathbf{T}=R$

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

Compattando la notazione, scriveremo le equazioni che rappresentano un sistema regolare come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

dove *x(t), u(t)* e *y(t)* sono vettori e *f* e *g* sono vettori di funzioni.

f è detta <u>*funzione di velocità di transizione dello stato*</u>
g è detta <u>*funzione di uscita*</u>

Il sistema descritto è di ***dimensione n con m ingressi e p uscite.***

Tipologie di sistemi

Si possono distinguere, in base al numero di ingressi e di uscite, i seguenti tipi di sistema:

• **MIMO** (Multiple Input Multiple Output): sistema con m (>1) ingressi e p (>1) uscite

• **MISO** (Multiple Input Single Output): sistema con m (>1) ingressi e un'uscita sola (p=1)

• **SIMO** (Single Input Multiple Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e p (>1) uscite

• **SISO** (Single Input Single Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e una sola uscita (p=1)

Classificazione dei modelli

- **Lineare**

Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\
y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)
\end{aligned}
$$

→ **o Lineare Tempo-Invariante (LTI)**

Non Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ continue a tratti

- **Non lineare**

Stazionario

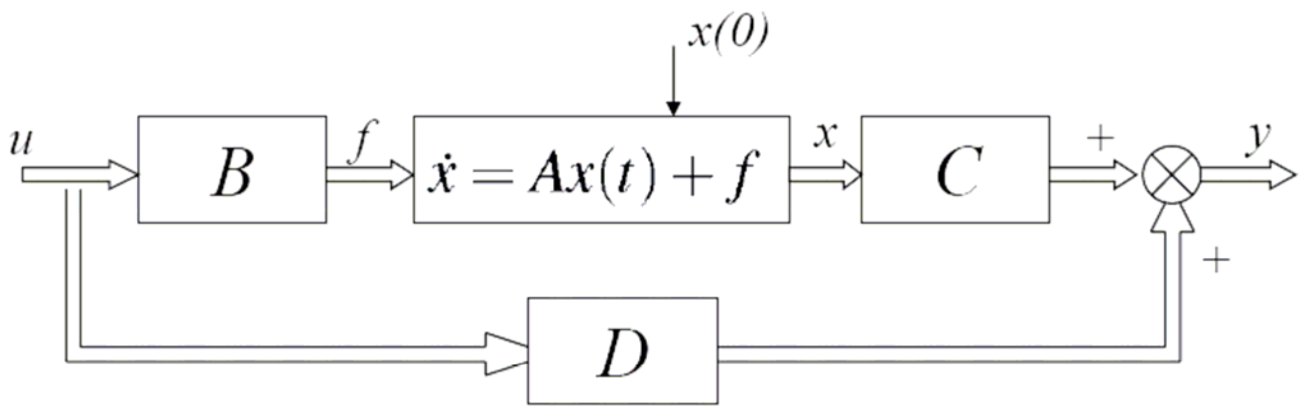
$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= g(x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

Non Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\
y(t) &= g(x(t), u(t), t)
\end{aligned}
$$

La classe di modelli più... “apprezzata”!

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
  - nel caso SISO da (A, b, c, d).



u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema
B : matrice di distribuzione degli ingressi
C : matrice di distribuzione delle uscite
D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

La classe di modelli più... “apprezzata”!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice Quadrata

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{pmatrix}$$

NB: se il sistema è puramente dinamico D = 0

Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato, abbiamo detto che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per **X=R^n**, **U=R^m** e **Y=R**^{p} e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo una matrice n x n T costante e non singolare e mediante un *cambio di variabili* definiamo un nuovo vettore di stato x come:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$

Rappresentazioni equivalenti

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ \\ y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{cases}$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB$$
$$\bar{C} = CT^{-1} \quad \bar{D} = D$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è *equivalente* al sistema LTI di partenza, nel senso che per un ingresso u(t) e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = Tx_0$$

Le funzioni dello stato x(t) e z(t) sono legate dalla relazione

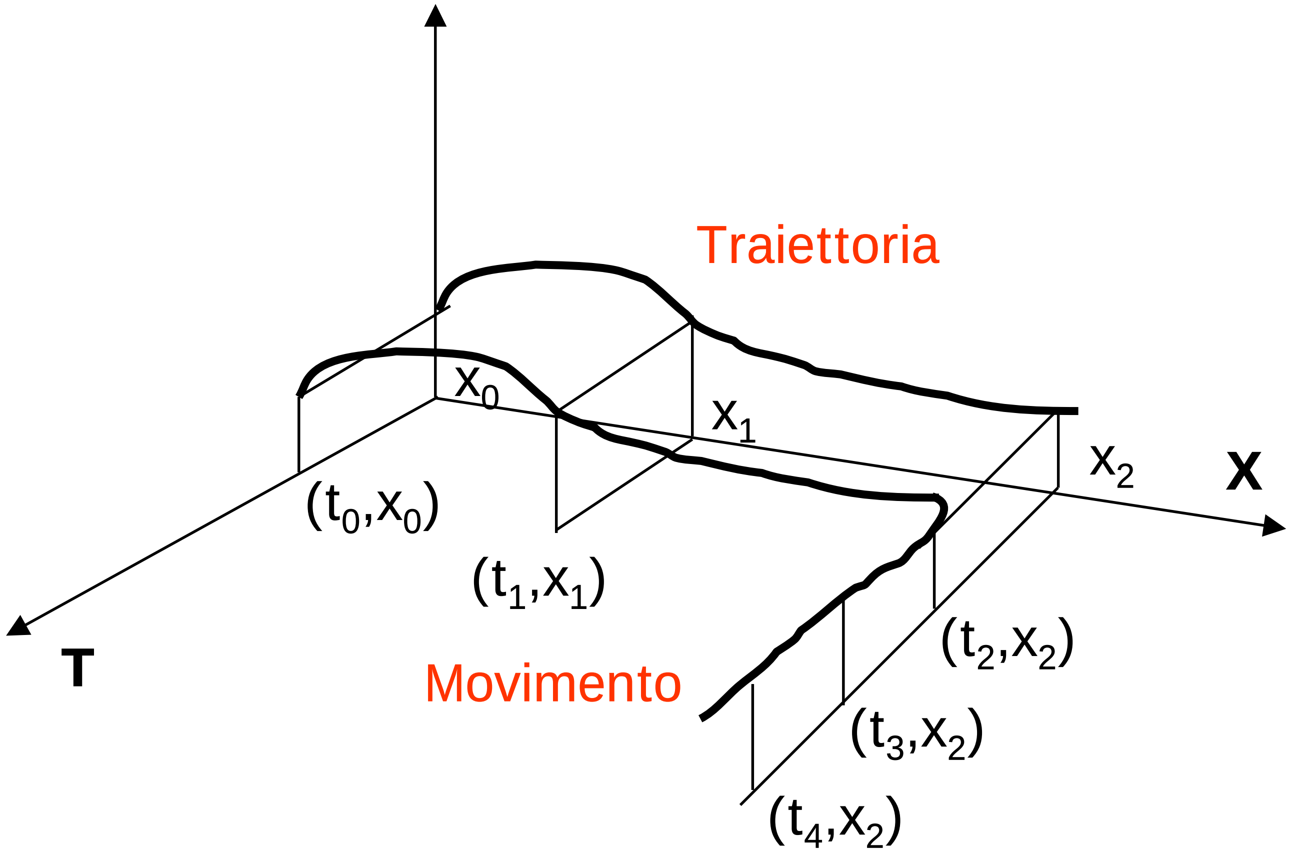
$$z(t) = Tx(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

Analisi dei sistemi

- **Analisi del moto o della risposta**: soluzione delle equazioni differenziali per determinare il moto di x o la risposta di y, dato u.
- **Analisi della stabilità**: verifica di come le variazioni limitate sul valore iniziale di x e sulla funzione di u influenzino il moto di x o la risposta di y.
- **Analisi della controllabilità**: verifica delle possibilità di influire su x e y, agendo opportunamente su u
- **Analisi dell'osservabilità**: verifica delle possibilità di determinare x, note le funzioni di y e u

Movimento (o moto), traiettoria ed equilibrio



Perchè “apprezzare” i sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi lineari stazionari o Lineari Tempo-Invarianti (LTI) le analisi citate si effettuano con “semplici” risultati di algebra lineare
- Dato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad\qquad x(0) = x_0$$

La soluzione dell’equazione è data dalla *formula di Lagrange* :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Moto libero + moto forzato

Inoltre, vale il principio della *sovrapposizione degli effetti*

Esponenziale di matrice

- La formula di Lagrange si basa sull'**esponenziale di matrice**, calcolabile come estensione della funzione esponenziale scalare (tramite espansione in serie):

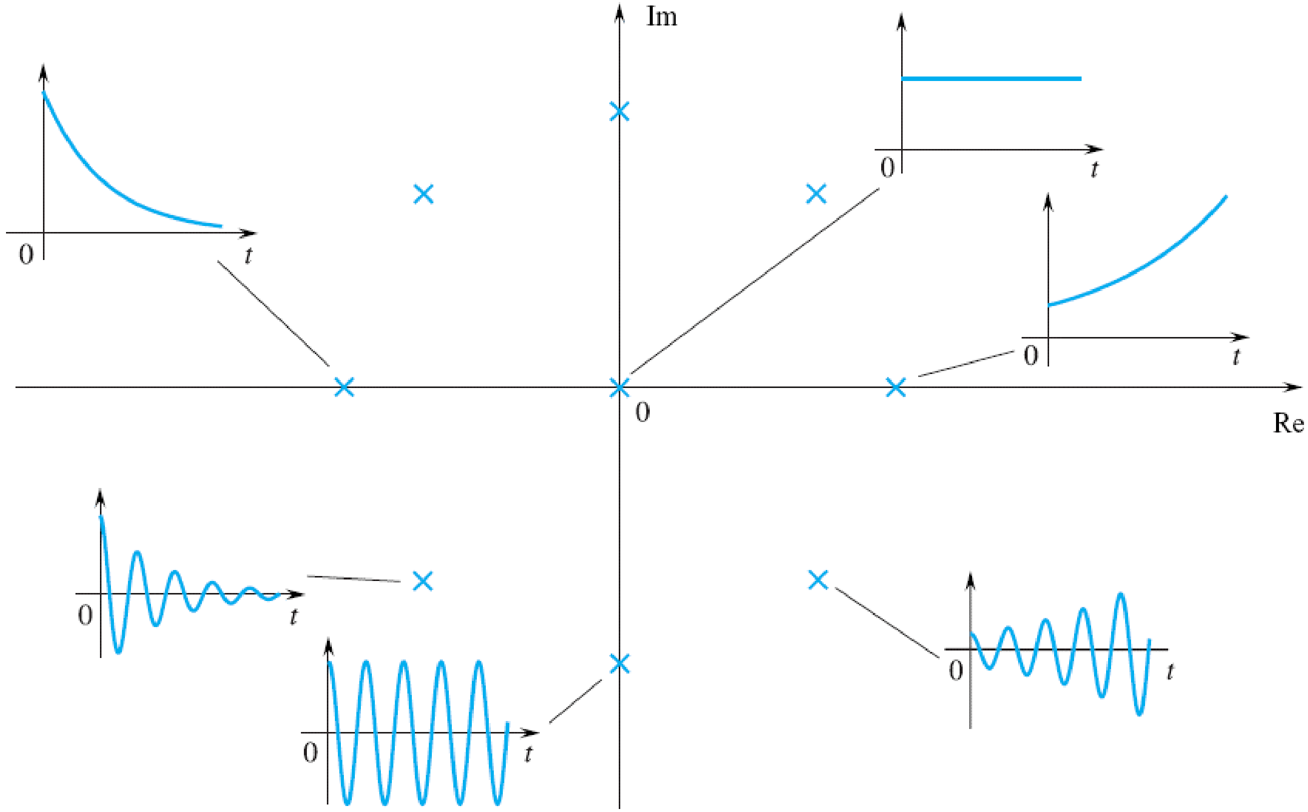
$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^n\frac{t^n}{n!} + \ldots \qquad a \in \mathbb{R}$$

Analogamente, è possibile definire l'esponenziale di una matrice come:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots \qquad \text{A matrice quadrata}$$

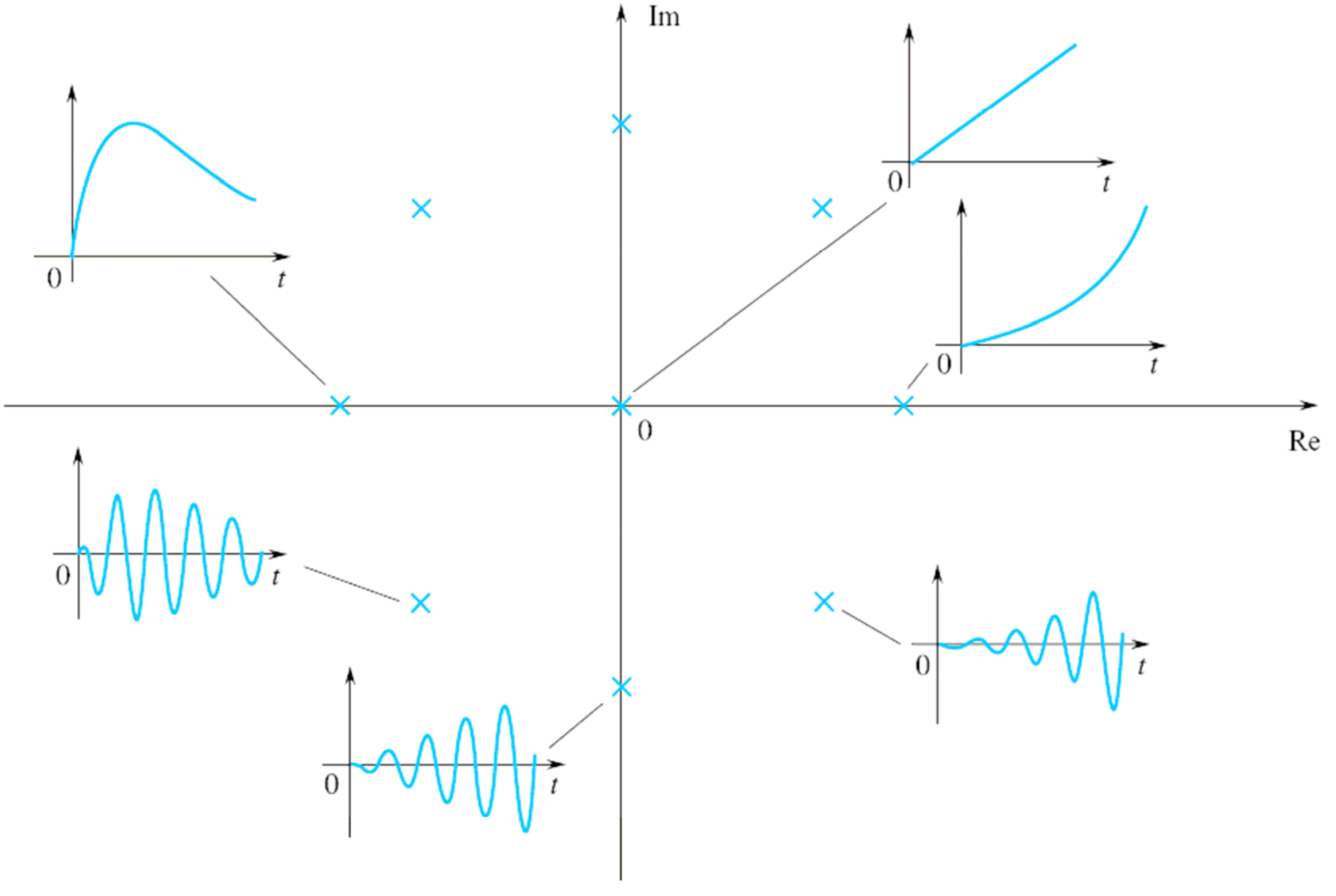
Esponenziale di matrice e *modi*

- I movimenti liberi e forzati sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali di base, dette **modi**, il cui andamento dipende dagli **autovalori di A e dalla loro molteplicità**
- Es. con autovalori **singoli**



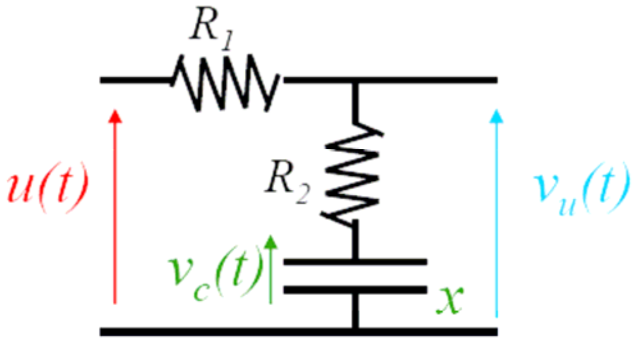
Esponenziale di matrice e *modi*

- Es. con autovalori **doppi**

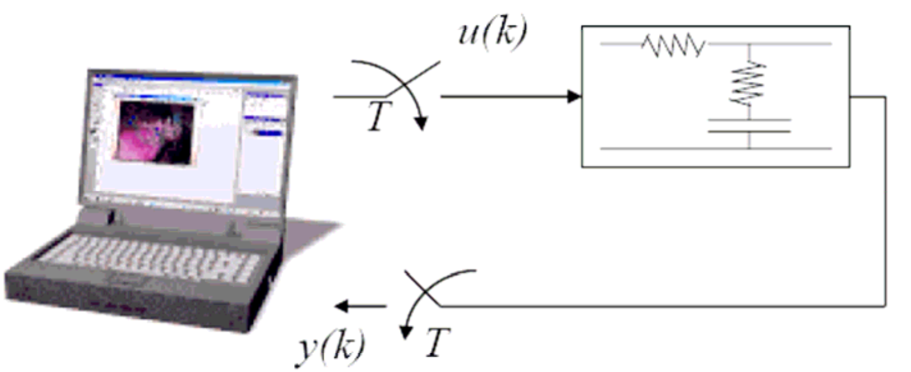


Sistemi a tempo discreto

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema a tempo continuo viene accoppiato ad un elaboratore digitale

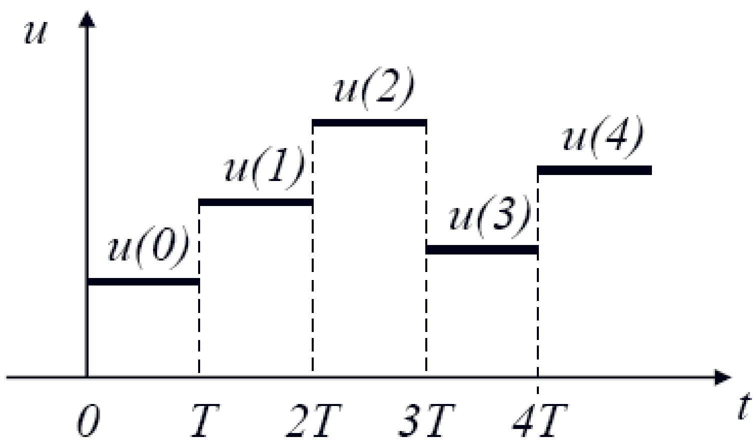


$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$



Sistemi a tempo discreto

- Se si considera che all'ingresso venga applicata una funziona costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti *kT* in cui l'ingresso varia



$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k) \\ y(k) &= c_d x(k) + d_d u(k) \end{aligned}$$

$$a_d = e^{aT}; \quad b_d = \int_0^T e^{a(T-\tau)} b d\tau$$

$$c_d = c; \quad d_d = d$$

Sistemi a tempo discreto

- In generale, comunque si arrivi al modello MIMO

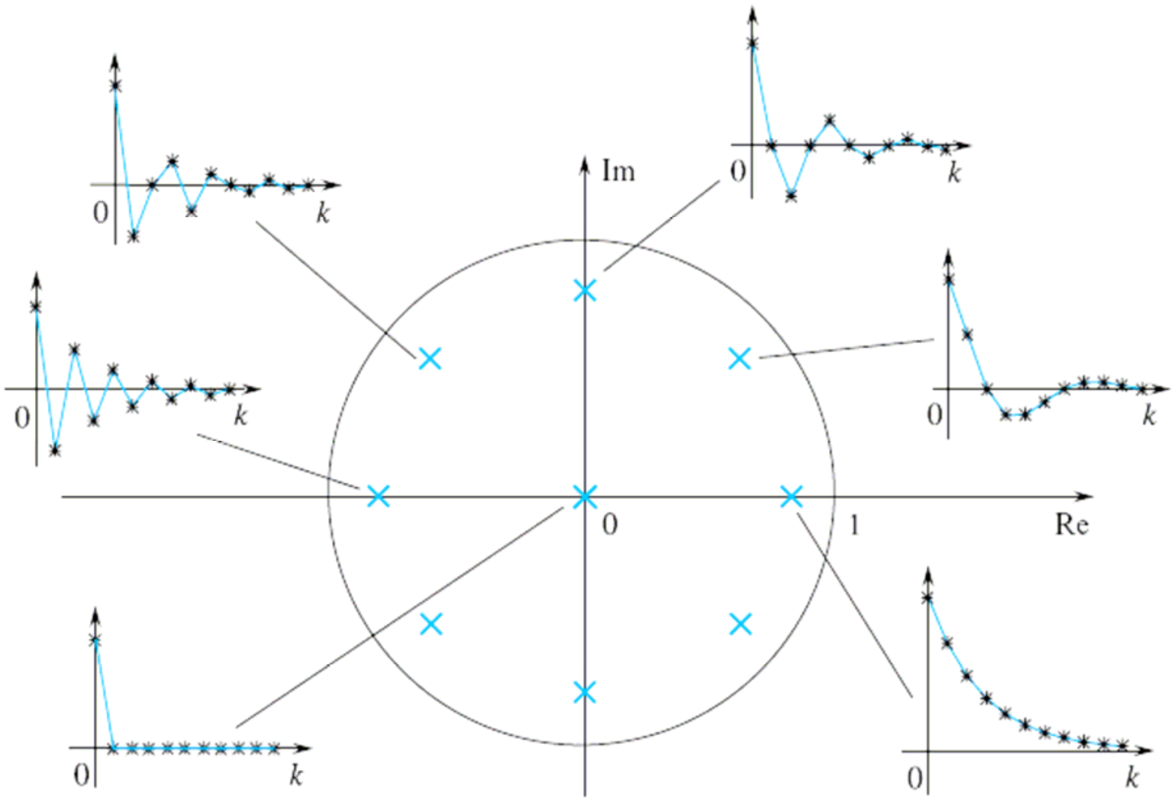
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

il movimento si può calcolare direttamente e in modo ancora più intuitivo:

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i)$$

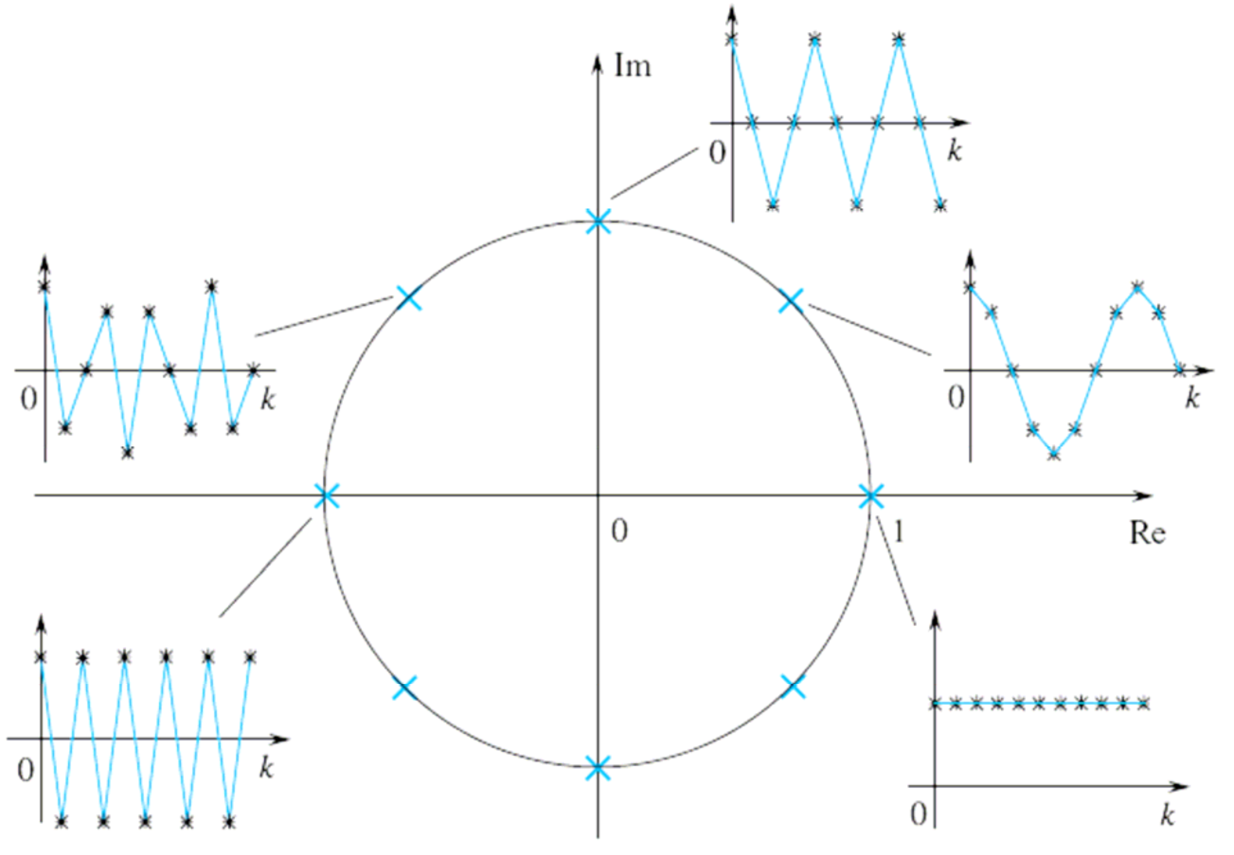
Sistemi a tempo discreto e modi

- Sempre in funzione degli **autovalori di A**, ma... è diversa la relazione con la collocazione sul piano complesso, rispetto al tempo continuo
- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i| < 1$)**



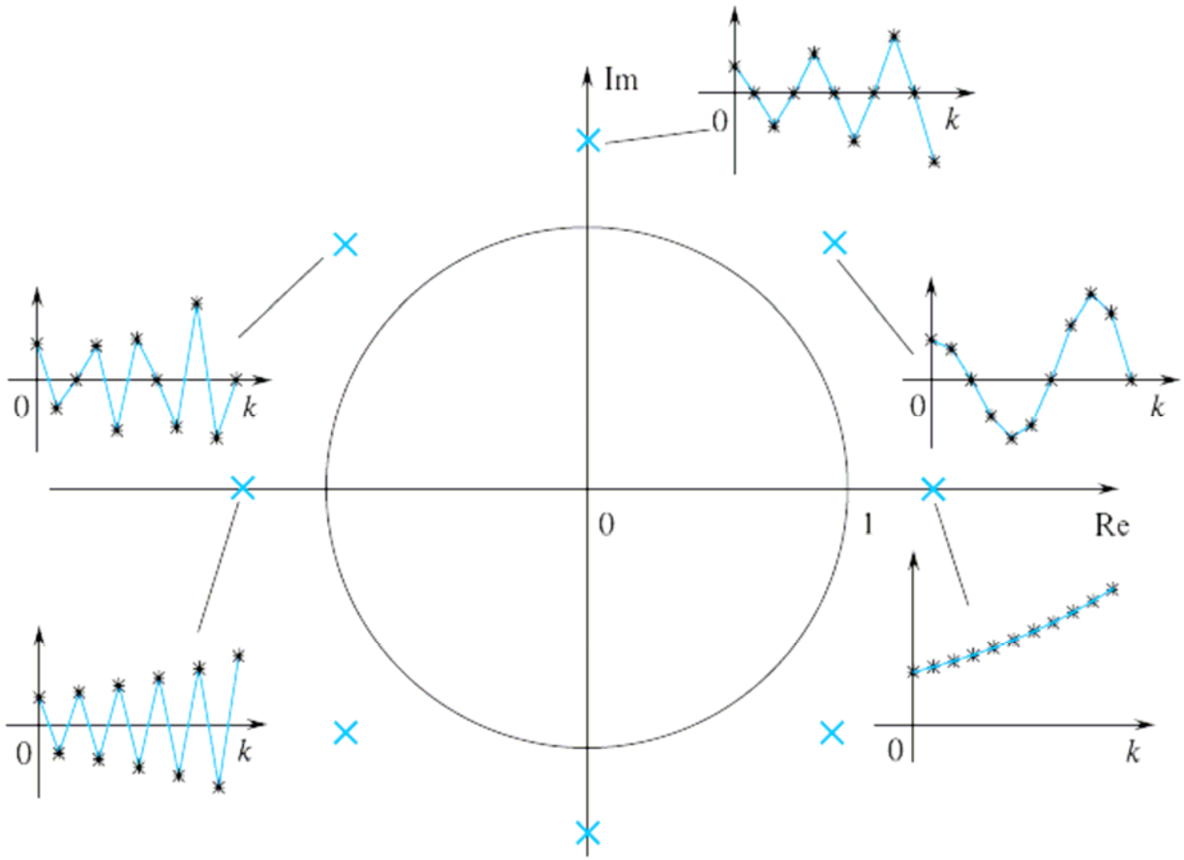
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i|$ = 1)**



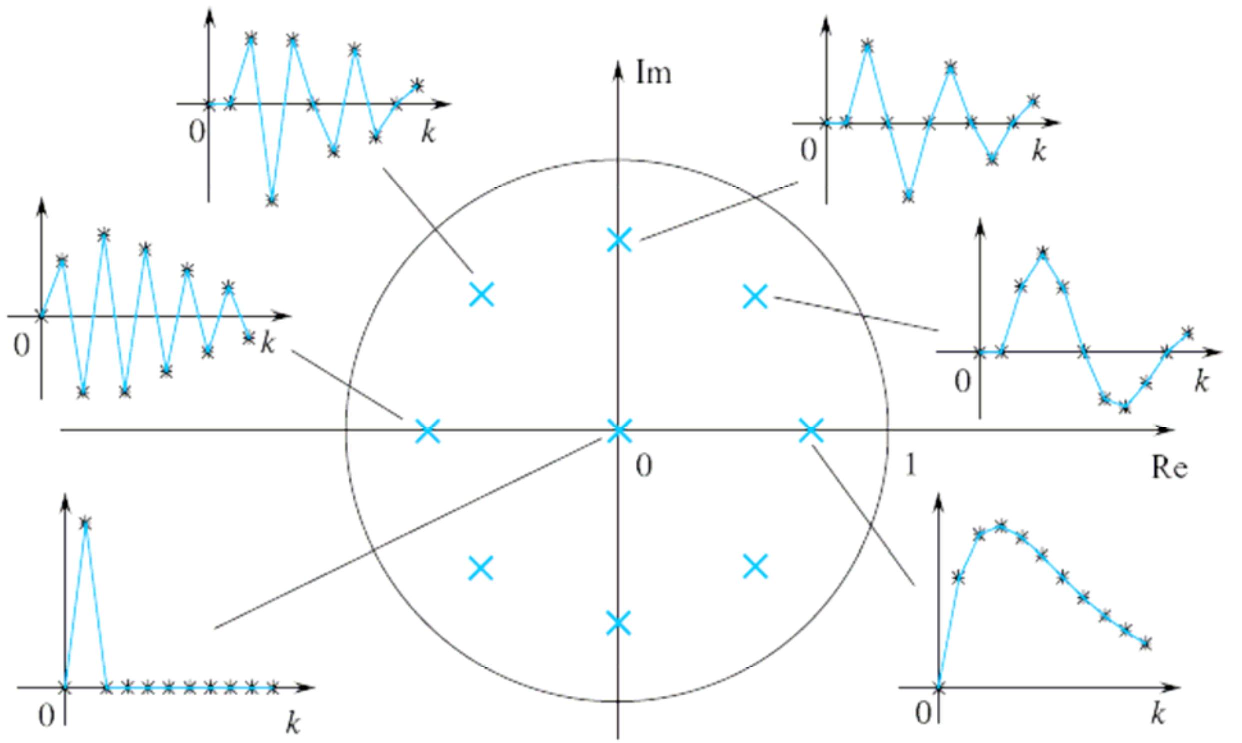
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i| > 1$)**



Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **doppi (|λ_i| < 1)**



Stabilità

- In generale, si analizza la **stabilità dei punti di equilibrio e/o dei movimenti** di un sistema dinamico
- Con il termine **stabilità** si intende la capacità di un sistema di reagire con variazioni limitate del moto *x(.)* a perturbazioni limitate dello stato iniziale $x(t_0)$ (oppure dell'ingresso *u(.)*)

- $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$: moto di riferimento
- $x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sullo stato iniziale* $\delta x_1(t_0)$
- $x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sull'ingresso* $\delta u(\cdot)$

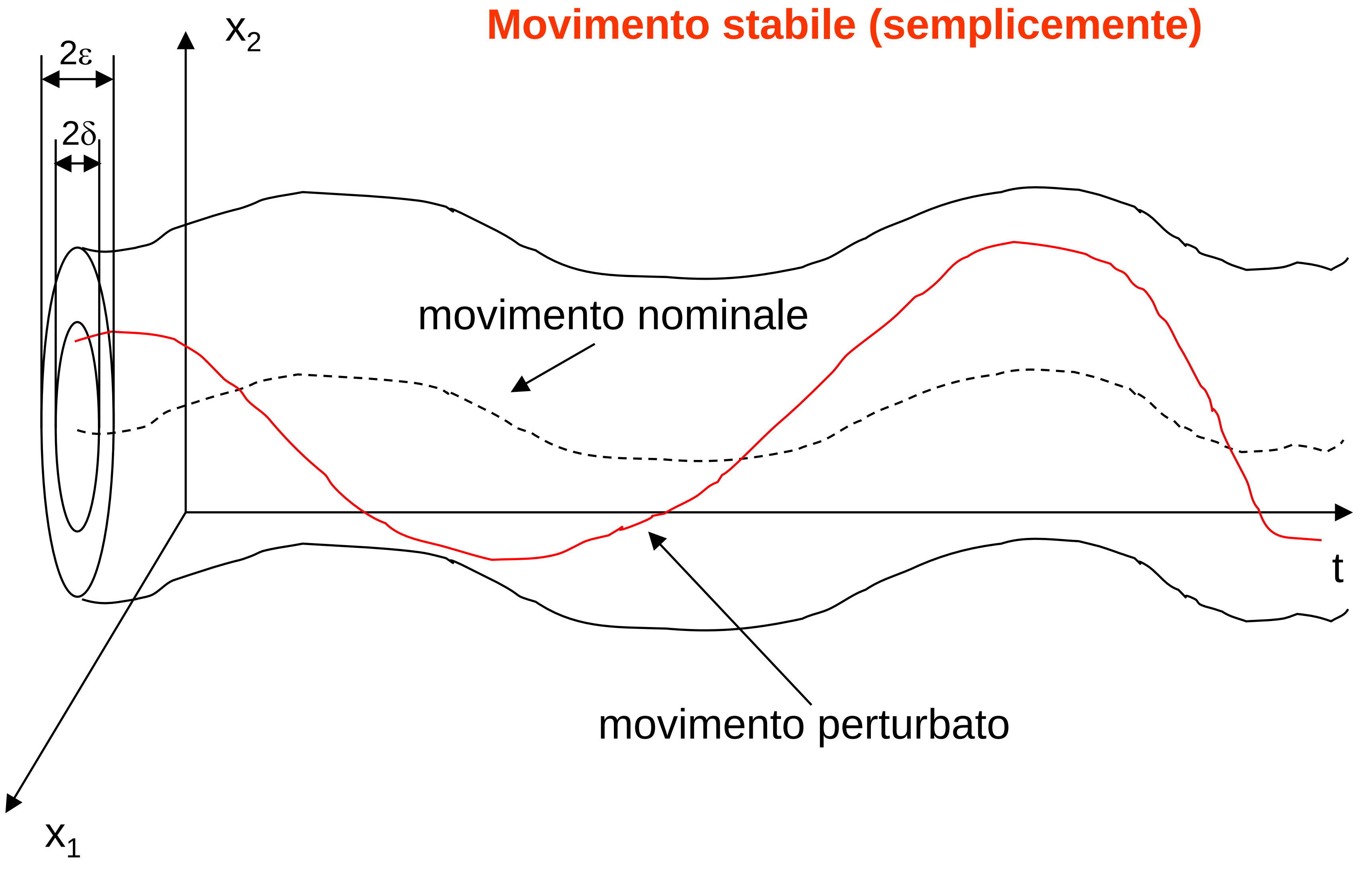
Stabilità: definizioni

- Dato $\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t)$ si dice che **il moto di riferimento è (semplicemente) stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta x_1(t_0)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

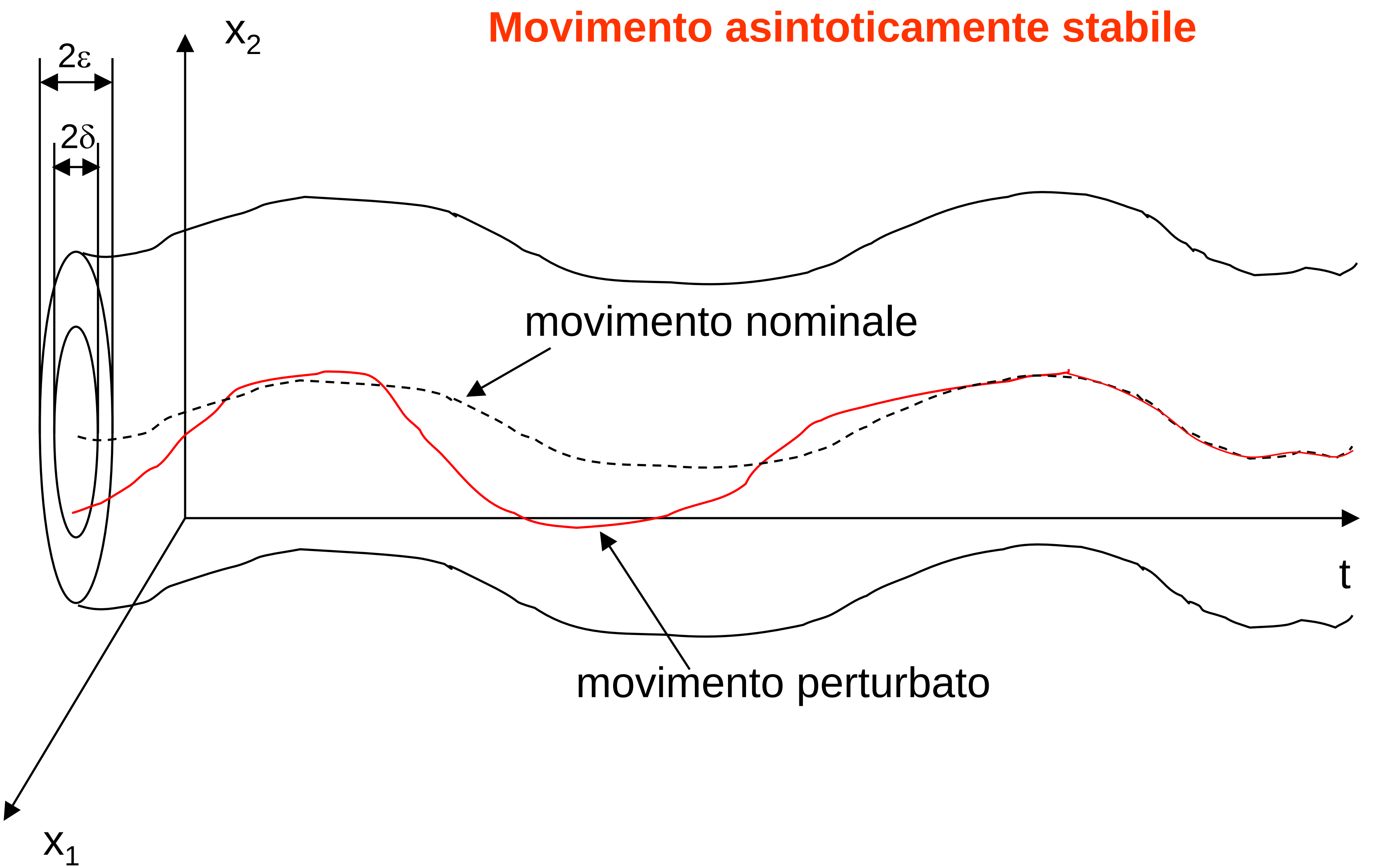
- Si dice che **il moto di riferimento è asintoticamente stabile** se, <u>oltre ad essere semplicemente stabile</u>, soddisfa la relazione

$$\lim_{t \to \infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

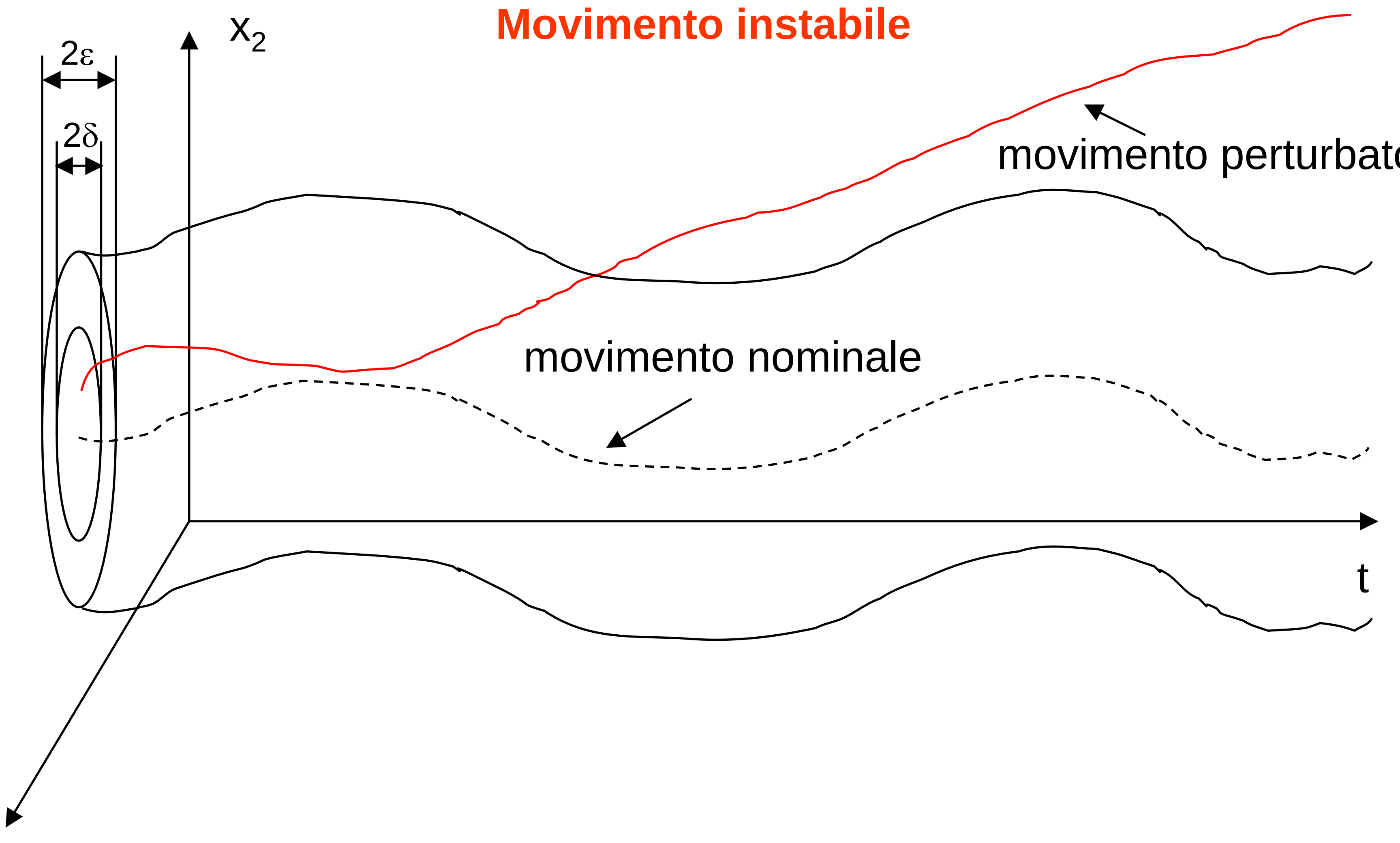
Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica - 1



Stabilità: interpretazione geometrica - 2



Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema** e non dei singoli punti di equilibrio o movimenti
- Se A è invertibile, il punto di equilibrio è unico

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono solo dagli autovalori di A (i quali inoltre **NON** dipendono dalla rappresentazione, qualunque $\bar{A}=T\,A\,T^{-1}$ ha gli stessi autovalori di A!)

Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- **[TEOREMA]** Un sistema LTI tempo-continuo è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa

- **[TEOREMA]** Un sistema LTI tempo-discreto è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno modulo minore di 1

Raggiungibilità e Controllabilità

- **Obiettivo** dell'analisi: comprendere le possibilità di intervento su un sistema tramite l'azione di controllo (dualmente: stima tramite osservazioni)
- Tali proprietà del sistema sono **strutturali,** cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione
- Inoltre, **NON** sono modificabili tramite il controllo
- **Raggiungibilità / Controllabilità:**
  - Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
  - Conseguenze: proprietà in catena chiusa

Raggiungibilità (da $x(t_0)=x_0$ a ?)

Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza l'insieme degli stati che possono essere (appunto) **raggiunti** a partire da uno stato x_0 e in intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0<t_1$), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile u(.)

L'insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0)$$

Controllabilità (da ?? a $x(t_1)=x_1$)

Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza invece l'insieme degli stati di un sistema dinamico che possono essere **controllati** (*forzati*) ad un determinato stato finale x_1 e in un intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0<t_1$), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile u(.)

L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire dall'istante t_1 è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1)$$

Raggiungibilità e controllabilità

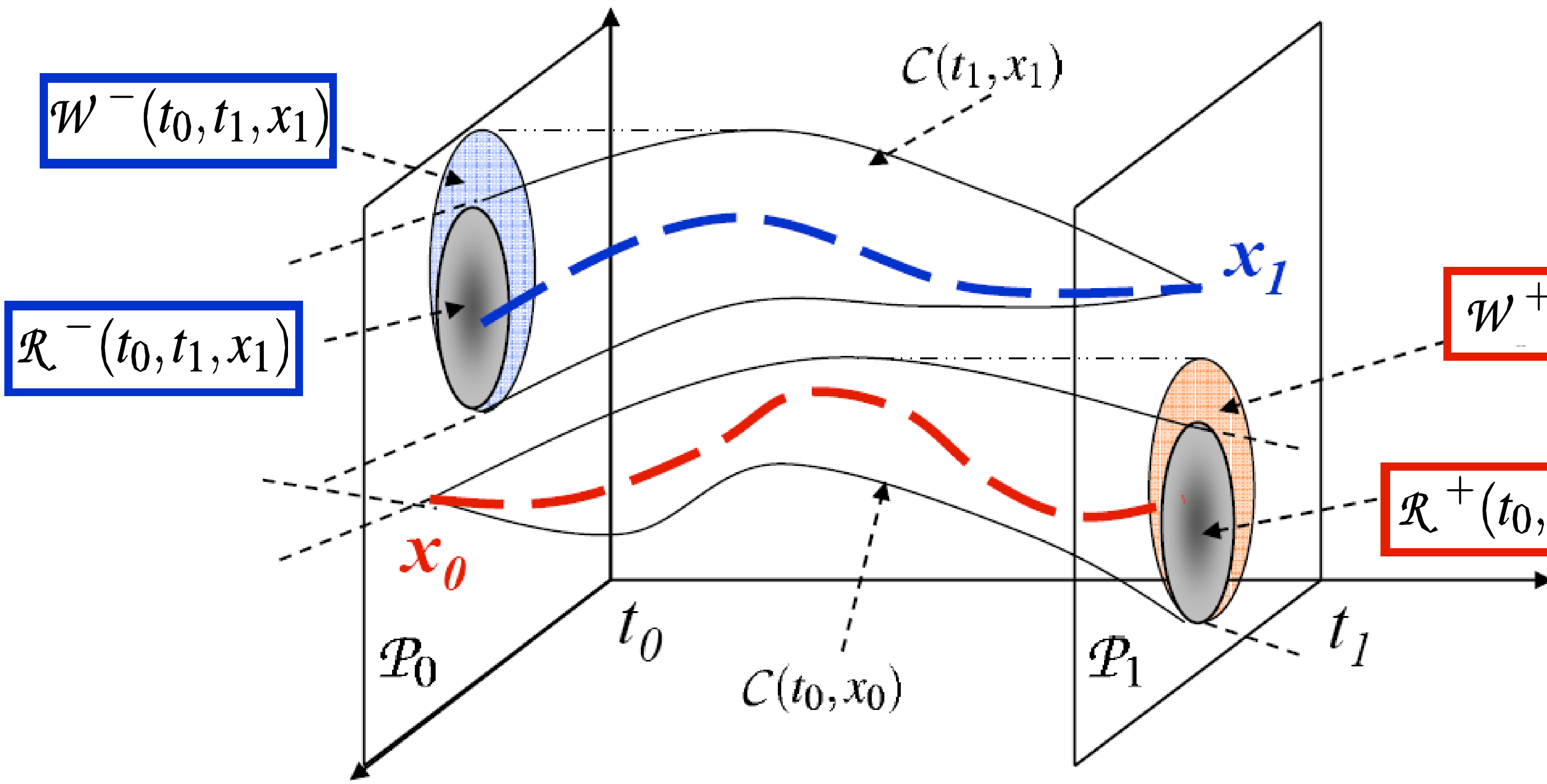
Per estensione:

L'insieme degli stati raggiungibili in un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con $\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x_0)$

L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire da un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con $\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1)$

Interpretazione geometrica

$C(t_1,x_1)$ e $C(t_0,x_0)$: insieme dei moti cui appartengono (t_1,x_1) e (t_0,x_0)



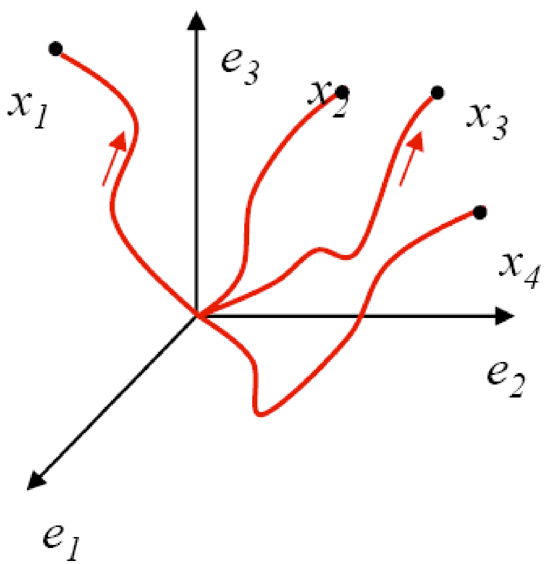
NOTA: per i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), tali proprietà non dipendono da t_0 e t_1 ma solo da $t=t_1-t_0$ e si può considerare $x = 0$ come unico punto di interesse

Raggiungibilità e Controllabilità complete

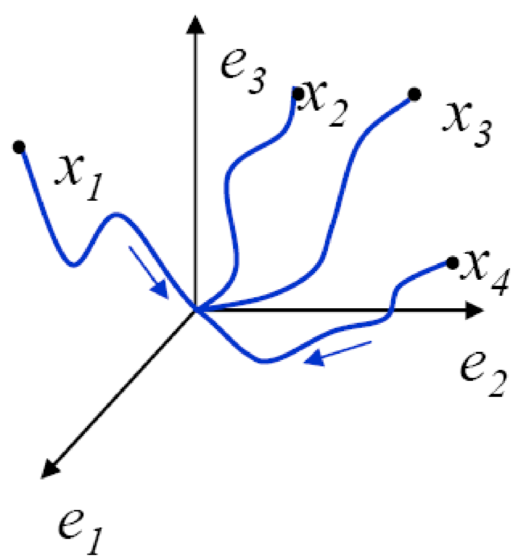
- Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

È completamente raggiungibile se qualunque stato può essere raggiunto da x=0 in un tempo finito



È completamente controllabile se x=0 può essere raggiunto da qualunque stato in t finito



Raggiungibilità e risposta forzata

- La possibilità di considerare x=0 come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente alla risposta forzata:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

TEMPO CONTINUO

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

TEMPO DISCRETO

Raggiungibilità dei sistemi LTI t.discreti

- Insieme di stati raggiungibili in *k* passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
x(1) &= Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\dots \\
x(k) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\}$

= **sottospazio stati raggiungibili** in *k* passi

Sottospazio raggiungibile

- L'insieme (*sottospazio*) degli stati raggiungibili in *n* passi è anche l'insieme degli stati raggiungibili **dal sistema**
- Infatti, oltre gli *n* passi non è utile proseguire per via del teorema di Cayley-Hamilton, dal quale risulta che:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

e si definisce il **sottospazio raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$

Teorema di Cayley-Hamilton

- Data la matrice A nxn e il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

la matrice A è tale che

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

e pertanto:

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \cdots - a_n$$

Matrice di raggiungibilità

- Poiché il sottospazio raggiungibile è:

$$\mathcal{R}^{+}(0) = im\{[B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B]\}$$

  si definisce **matrice di raggiungibilità:**

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B]$$

- Il sistema è **completamente raggiungibile** $(\mathcal{R}^{+}(0) = \mathbb{R}^n)$ se e solo se:

$$rank(P) = n$$

Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, sistemi equivalenti, per i quali cioè:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= T^{-1}B \end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_k{}^{+}(0) &= im\{\left[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \ldots \bar{A}^{k-1}\bar{B}\right]\} \\ &= im\{T^{-1}\left[B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{k-1}B\right]\} \\ &= T^{-1}\mathcal{R}_k{}^{+}(0) \end{aligned}$$

per cui tali sottospazi hanno la stessa dimensione

Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

- Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo x(0)$\neq$0, in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

➔ x(0)$\neq$0 è controllabile in k passi se $-A^k x(0)$ è raggiungibile in k passi

$$A^k x(0) \in im\{ \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \dots A^{k-1} B \end{bmatrix} \} = \mathcal{R}_k^{+}(0)$$

Raggiungibilità dei sistemi LTI continui

- Analogamente, per determinare gli stati **raggiungibili** di $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau$$

- Dal teorema di Cayley-Hamilton si può esprimere:

$$e^{A\tau} = I\gamma_0(\tau) + A\gamma_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}\gamma_{n-1}(\tau)$$

  con $\gamma_i(\tau)$ opportune funzioni scalari

- Si ottiene quindi:

$$x(t) = B\int_0^t \gamma_0(\tau) u(t-\tau) d\tau + AB\int_0^t \gamma_1(\tau) u(t-\tau) d\tau + \cdots +$$
$$+ A^{n-1} B \int_0^t \gamma_{n-1}(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

Controllabilità dei sistemi LTI continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(0) $\neq$ 0 è **controllabile** (a 0) al tempo *t* se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.) tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$, e si possono quindi applicare considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza

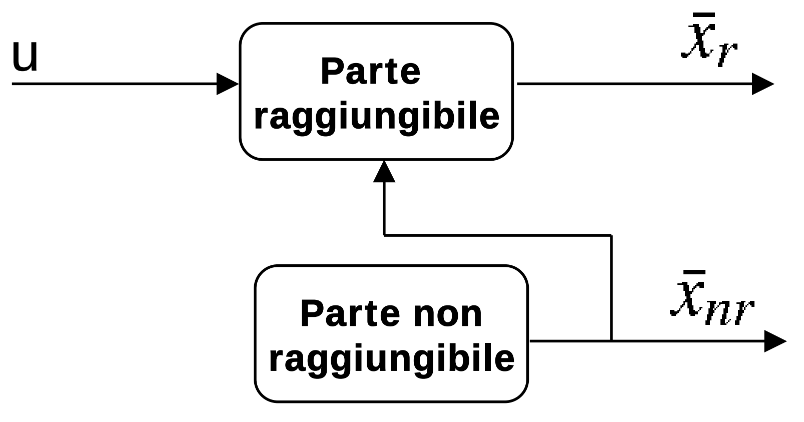
- <u>Anche per i sistemi LTI continui</u>, controllabilità e raggiungibilità sono caratterizzate dal rango di:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Forma canonica di raggiungibilità: scomposizione

- Se il sistema non è completamente raggiungibile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



Considerazioni “applicative”

- Le proprietà analizzate permettono di progettare leggi di controllo in **catena aperta**, ma a **minima energia** (es. per sistemi t.discreto, basate sulla (pseudo)inversa della matrice P^+)
- Nel progetto di controllo in **catena chiusa** (es. retroazione dello stato), occorre considerare che il controllore non è in grado di agire sulla parte non raggiungibile del sistema (qualora sia presente).
- Se la parte non raggiungibile è stabile, allora il sistema è (almeno..) **stabilizzabile**

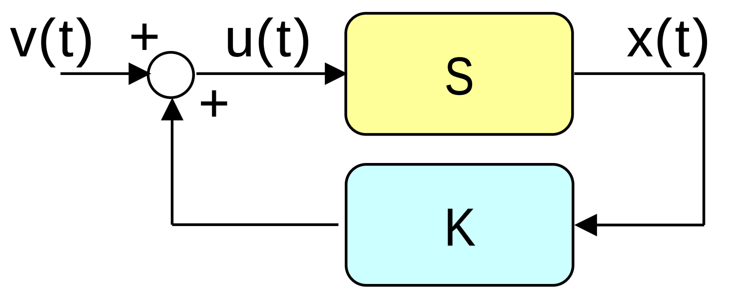
Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Infatti, dato un sistema LTI completamente raggiungibile

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e ipotizzando che *x* sia completamente **misurabile,** la legge di controllo con retroazione dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$



con dim(K) = m x n, permette di modificare arbitrariamente gli autovalori del sistema

Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Il sistema in catena chiusa diventa infatti

$$S_K = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BK)x(t) + Bv(t) \\ \\ y(t) = (C+DK)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

  i cui autovalori sono ovviamente quelli di A+BK
- ATTENZIONE: se il sistema NON è completamente raggiungibile, è possibile modificare SOLO gli autovalori della parte raggiungibile
- Se gli autovalori della parte NON raggiungibile sono a parte reale negativa, il sistema (come detto) viene definito **stabilizzabile**

Osservabilità e ricostruibilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ o finale $x(t_f)$ di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$
- Anche tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta dello stato), <u>ma</u> possono essere influenzate dal controllo
- **Analisi** di osservabilità / ricostruibilità:
  – Applicazione: progetto di algoritmi di stima e ricostruzione dello stato

Osservabilità e ricostruibilità - 1

Formalmente, si possono dare le **[Definizioni]:**

- Un sistema si dice **completamente osservabile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato iniziale $x(t_0)$ per ogni $u[t_0,t_1]$
- Un sistema si dice **completamente ricostruibile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato finale $x(t_f)$ per ogni $u[t_0,t_1]$

Osservabilità e risposta libera

- Nei sistemi LTI, per l'analisi di osservabilità e ricostruibilità è possibile:
  - considerare solo la prima proprietà, poiché essa implica la seconda (noto $x(t_0)$ è possibile calcolare $x(t_f)$)
  - analizzare solo la risposta libera, poiché per la <u>sovrapposizione degli effetti</u> è l'unica parte della risposta che dipende dallo stato iniziale:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Risposta forzata}}$$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI

- Per risolvere il problema di osservabilità, si può considerare il sistema libero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- L'obiettivo è determinare in modo univoco lo stato conoscendo l'uscita, operazione immediata (per ogni t) se C è invertibile:

$$x(t) = C^{-1}y(t)$$

- Se C non è invertibile, si può tentare di ricavare una relazione invertibile derivando l'uscita:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 1

- L'operazione di derivata sull'uscita si può ripetere fino all'ordine n-1, sempre con l'obiettivo di ricavare una relazione invertibile uscita-stato:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre l'ordine n-1

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 2

- In modo analogo, per sistemi discreti si può esprimere la possibilità di osservazione dello stato iniziale analizzando le uscite dei primi n-1 passi:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre il passo n-1

Matrice di osservabilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di osservabilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n m)]

$$Q = \left[C \quad CA \quad CA^2 \ \ldots \ CA^{n-1}\right]^T$$

o equivalentemente:

$$Q^T = \left[C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \ \ldots \ (A^T)^{n-1} C^T\right]$$

- Il sistema è **completamente osservabile e completamente ricostruibile** se e solo se:

$$rango(Q^T) = n$$

Osservabilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{C} &= CT \end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di osservabilità:

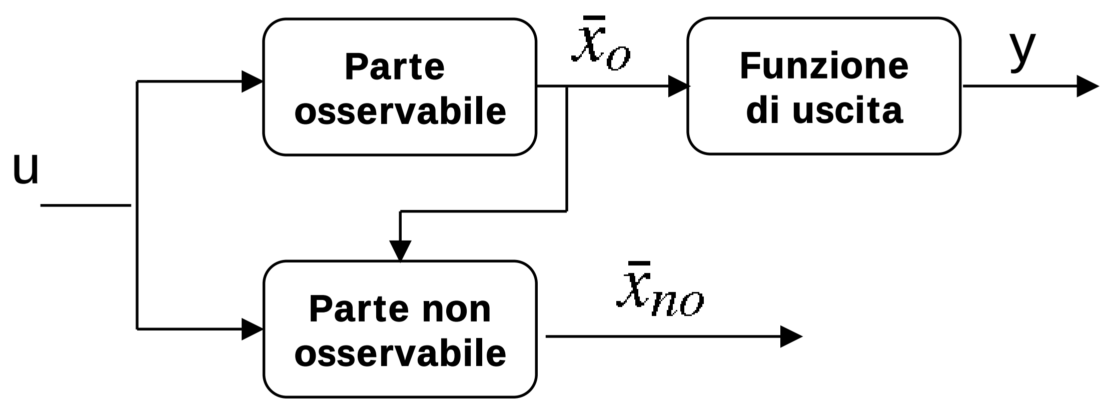
$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{C}\hat{A} & \hat{C}\hat{A}^2 \ldots \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \ldots CA^{n-1} \end{bmatrix}^T T \\ &= QT \end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di osservabilità

Forma canonica di osservabilità: scomposizione

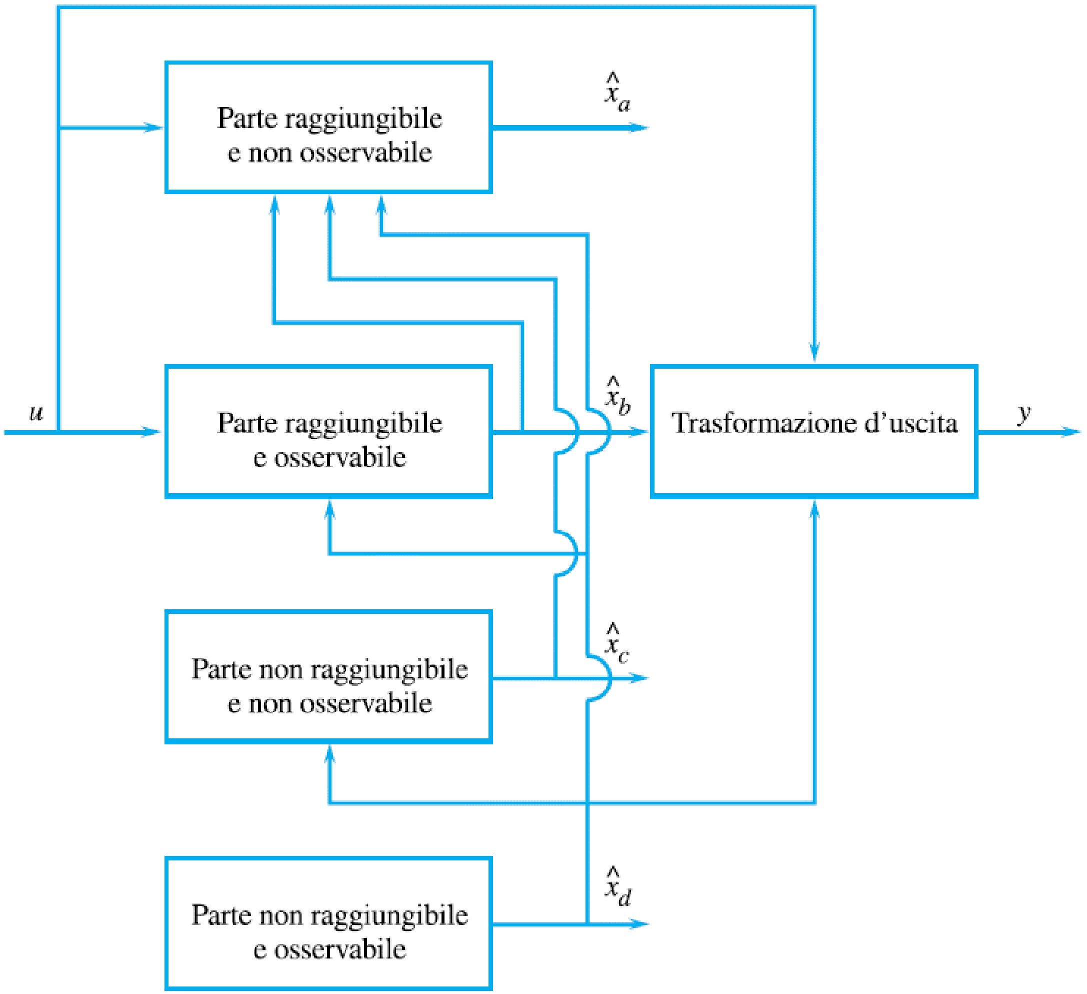
- Se il sistema non è completamente osservabile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} \end{cases}$$



Scomposizione canonica

- Unendo le due trasformazioni viste



Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)
- Dato:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \end{cases}$$

Dualità - 1

- Il numero di ingressi (uscite) di S corrisponde al numero di uscite (ingressi) di S_D
- Le matrici di raggiungibiltà e osservabilità di S_D (P_D e Q_D) sono legate a quelle di S (P e Q) come segue:

$$P_D = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = Q^T$$

$$Q_D = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}^T = P^T$$

Dualità - 2

- Risulta pertanto:

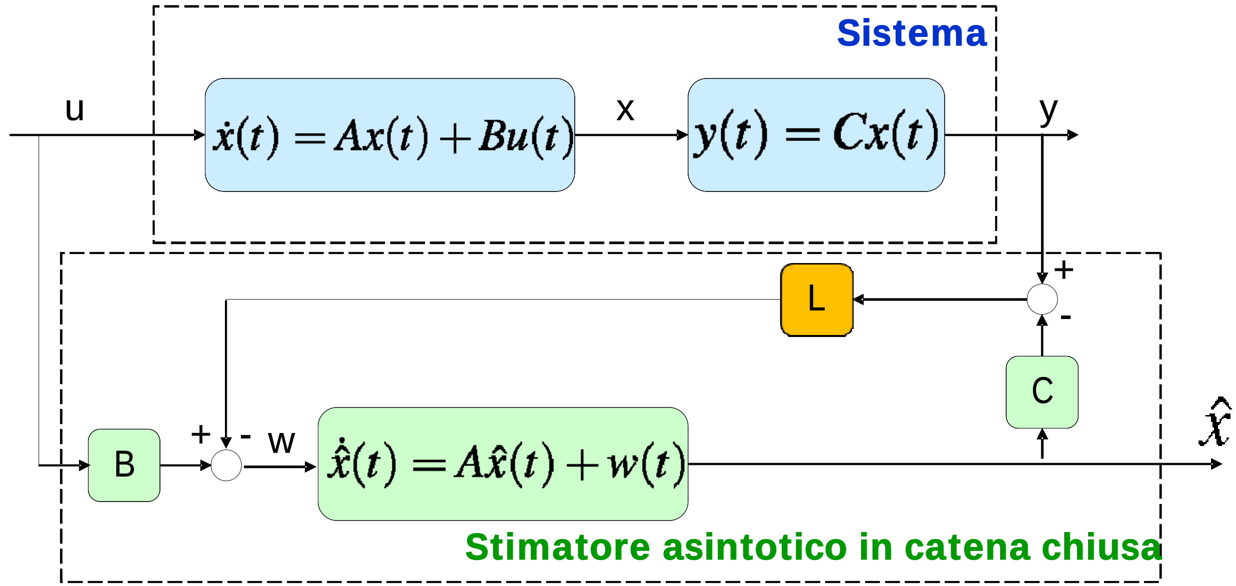
S stabile $\Leftrightarrow$ S_D stabile

S ragg.-contr. $\Leftrightarrow$ S_D oss.-ric.

S oss.-ric. $\Leftrightarrow$ S_D ragg.-contr.

Considerazioni “applicative”

- Il progetto di stimatori asintotici dello stato in catena chiusa:



può, grazie alla proprietà di dualità, essere effettuato sfruttando i metodi di allocazione degli autovalori per il progetto di controllori con retroazione dello stato.

Dinamica dell’osservatore asintotico

- Infatti, le equazioni dell’osservatore dello stato in catena chiusa sono:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A + LC)\hat{x}(t) - Ly(t) + Bu(t)$$

- Definendo $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ la dinamica dell’errore è

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) =$$

$$= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t) = (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A + LC)e(t)$$

i cui autovalori sono quelli di A+LC. Se la coppia (A,C) è osservabile, per dualità la coppia (A^T,C^T) è raggiungibile e gli autovalori dell’osservatore possono essere assegnati in modo arbitrario.

Progetto osservatore e rilevabilità

- Analogamente al caso del progetto di controllo, gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati arbitrariamente SOLO se il sistema è completamente osservabile
- Se non lo è, è ancora possibile costruire un osservatore asintotico purchè gli autovalori della parte non osservabile siano a parte reale negativa
- Il sistema in tal caso viene detto **rilevabile**

Controllo con retroazione dello stato stimato

- In generale, le variabili di stato non sono TUTTE misurabili direttamente, ma se il sistema è osservabile si può sfruttare il progetto di un osservatore ANCHE realizzare il controllo con retroazione completa dello stato (stimato)
- La dinamica del sistema complessivo diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases}$$

o in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BK\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC + BK)\hat{x}(t) - LCx(t) \end{cases}$$

Principio di separazione

- Esprimendo la dinamica in termini di x(t), stato reale, ed e(t), errore di stima:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{pmatrix}}^{A_R} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

  i cui autovalori sono costituiti dall'unione di quelli di A+KC con quelli di A+LC.

- Questi autovalori sono assegnabili arbitrariamente e **separatamente** per la parte di controllo e di osservazione