

# TECNICHE DI CONTROLLO E DIAGNOSI

## Richiami di Teoria dei Sistemi

Dott. Ing. SIMANI SILVIO

con supporto del  
Dott. Ing. BONFE' MARCELLO

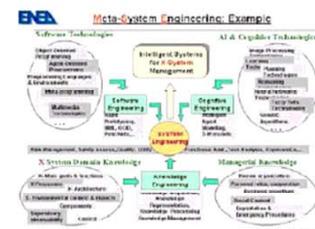
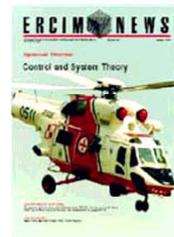
1

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Sistemi e Modelli

Da diversi anni, i termini:

- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- ...



sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse: controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia, gestione aziendale, gestione traffico, ...



**Sistema:** "elemento" comune in questa terminologia

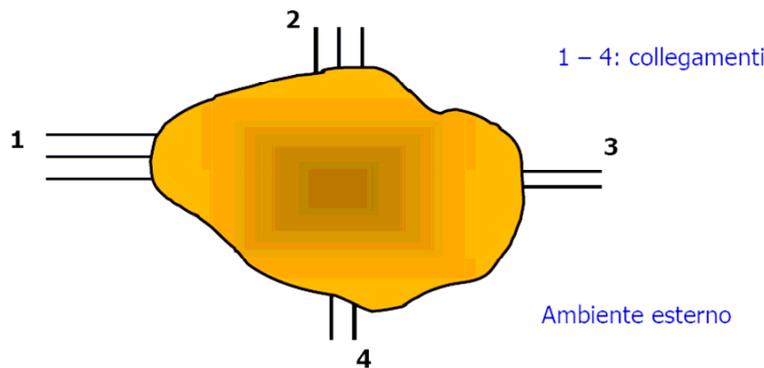
➔ Necessità di definire e studiare le *proprietà strutturali* dei "sistemi"

2

Richiami di Teoria dei Sistemi

# Concetto di Sistema

- **Sistema:** insieme, artificialmente isolato dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento
- **Attributo misurabile:** caratteristica che può essere messa in relazione con un insieme di simboli o numeri (interi, reali, complessi)
- **Modello matematico:** equazioni che descrivono le relazioni tra gli attributi misurabili.



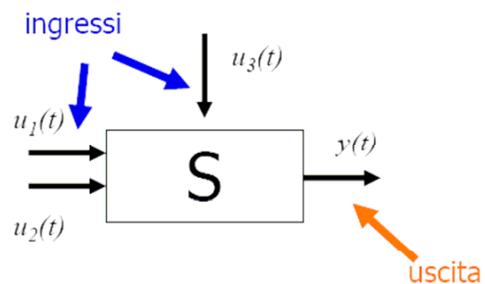
3

Richiami di Teoria dei Sistemi

# Causa → Effetto

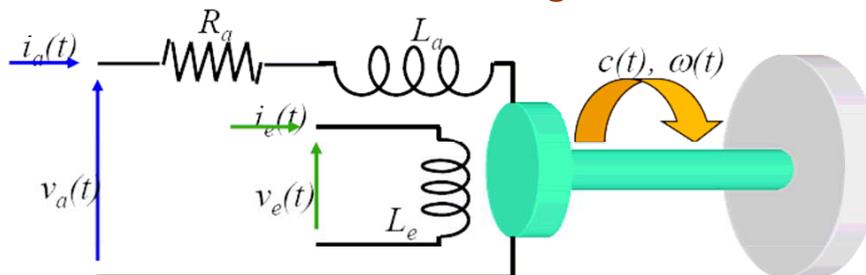
- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in

- Variabili di **ingresso** (cause)
- Variabili di **uscita** (effetti)



- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca

**Es.: Motore.. o generatore?**

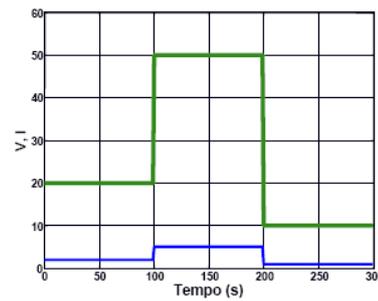
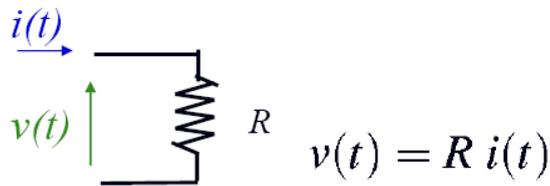


4

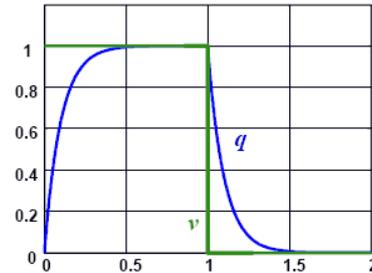
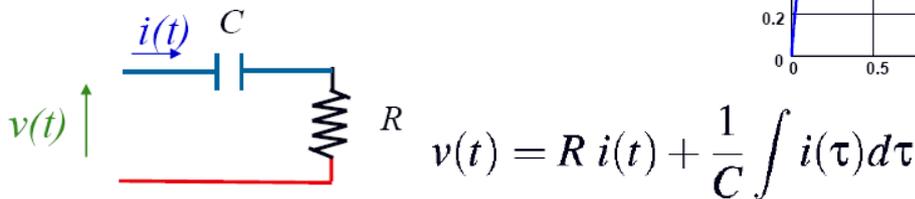
Richiami di Teoria dei Sistemi

# Sistemi e Dinamica

## ■ Sistema statico (algebrico)



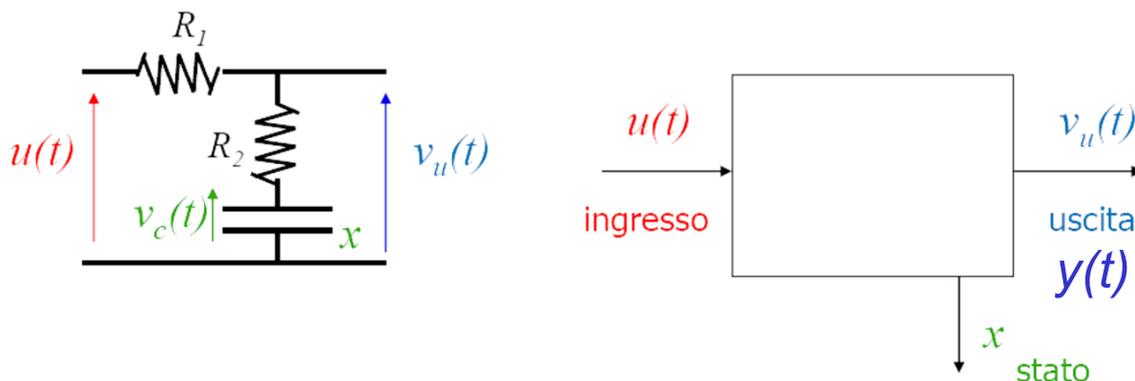
## ■ Sistema dinamico



# Sistemi e Dinamica

- **Sistemi dinamici:** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono **anche** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).

- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)



## Considerazioni “energetiche”



- ➡ Lo **stato** è l'informazione sulla “situazione interna” di un sistema, necessaria per predire l'effetto della sua storia passata sul suo comportamento futuro.
- ➡ Lo **stato** nei sistemi fisici è determinato dall'**accumulo di energia** (quantità di moto, energia potenziale, carica elettrica, ecc.)
- ➡ La scelta delle variabili di stato per la modellazione matematica è comunque **arbitraria e non univoca!**

## Considerazioni “energetiche”



- ➡ In ogni dominio fisico ci sono sempre **UNO o DUE** elementi che caratterizzano l'accumulo di energia
  - **Elettrico**: capacità (C) e induttanza (L)
  - **Meccanico traslante**: massa (M) e reciproco della rigidità (1/K)
  - **Meccanico rotante**: momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
  - **Fluidico**: capacità fluidica (Cf) e induttanza fluidica (Lf)
  - **Termico**: capacità termica (Ct)

# Considerazioni “energetiche”

dominio	accumulo “capacitivo”	accumulo “induttivo”
elettrico	$E = \frac{1}{2} C v^2$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
meccanico traslante	$E = \frac{1}{2} M v^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} f^2$
meccanico rotante	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} c^2$
idraulico/pneumatico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
termico	$E = C_t T$	manca

l'energia accumulata dipende dalle
➔
**variabili ai morsetti**
**variabili passanti**

# Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{array} \right.$$

## Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- **Stato:**  $x(t) \in \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}=\mathbb{R}^n$
- **Ingresso:**  $u(t) \in \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}=\mathbb{R}^m$
- **Uscita:**  $y(t) \in \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y}=\mathbb{R}^p$

all'istante  $t \in \mathbf{T}=\mathbb{R}$

## Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

Compattando la notazione, scriveremo le equazioni che rappresentano un sistema regolare come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

dove  $x(t)$ ,  $u(t)$  e  $y(t)$  sono vettori e  $f$  e  $g$  sono vettori di funzioni.

$f$  è detta funzione di velocità di transizione dello stato

$g$  è detta funzione di uscita

Il sistema descritto è di **dimensione  $n$  con  $m$  ingressi e  $p$  uscite**.

# Tipologie di sistemi

Si possono distinguere, in base al numero di ingressi e di uscite, i seguenti tipi di sistema:

- **MIMO (Multiple Input Multiple Output):** sistema con  $m (>1)$  ingressi e  $p (>1)$  uscite
- **MISO (Multiple Input Single Output):** sistema con  $m (>1)$  ingressi e un'uscita sola ( $p=1$ )
- **SIMO (Single Input Multiple Output):** sistema con un solo ingresso ( $m=1$ ) e  $p (>1)$  uscite
- **SISO (Single Input Single Output):** sistema con un solo ingresso ( $m=1$ ) e una sola uscita ( $p=1$ )

# Classificazione dei modelli

## ■ Lineare

*Stazionario*

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

→ o **Lineare Tempo-Invariante (LTI)**

*Non Stazionario*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Con  $A(t), B(t), C(t), D(t)$   
continue a tratti

## ■ Non lineare

*Stazionario*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

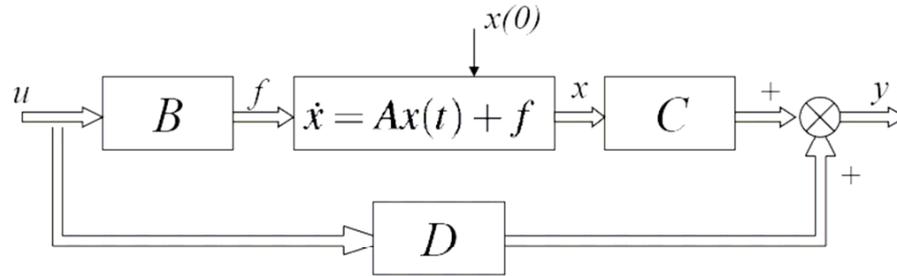
*Non Stazionario*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

## La classe di modelli più... “apprezzata”!

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici ( $A, B, C, D$ )
  - nel caso SISO da ( $A, b, c, d$ ).



$u$  : ingresso;  $y$  : uscita;  $f$  : azione forzante;  $x$  : stato

- $A$  : matrice del sistema
- $B$  : matrice di distribuzione degli ingressi
- $C$  : matrice di distribuzione delle uscite
- $D$  : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

## La classe di modelli più... “apprezzata”!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Matrice Quadrata**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{pmatrix}$$

**NB: se il sistema è puramente dinamico  $D = 0$**

## Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato, abbiamo detto che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per  $\mathbf{X}=\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{U}=\mathbf{R}^m$  e  $\mathbf{Y}=\mathbf{R}^p$  e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo una matrice  $n \times n$   $T$  costante e non singolare e mediante un *cambio di variabili* definiamo un nuovo vettore di stato  $x$  come:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$

## Rappresentazioni equivalenti

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \bar{A} = TAT^{-1} & \bar{B} = TB \\ \bar{C} = CT^{-1} & \bar{D} = D \end{matrix}$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è *equivalente* al sistema LTI di partenza, nel senso che per un ingresso  $u(t)$  e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = Tx_0$$

Le funzioni dello stato  $x(t)$  e  $z(t)$  sono legate dalla relazione

$$z(t) = Tx(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

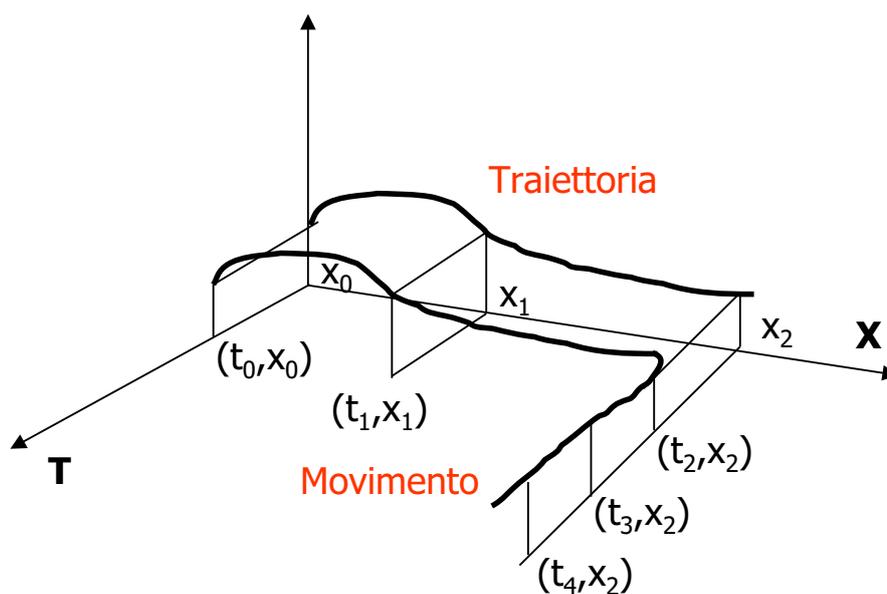
## Analisi dei sistemi

- **Analisi del moto o della risposta:** soluzione delle equazioni differenziali per determinare il moto di  $x$  o la risposta di  $y$ , dato  $u$ .
- **Analisi della stabilità:** verifica di come le variazioni limitate sul valore iniziale di  $x$  e sulla funzione di  $u$  influenzino il moto di  $x$  o la risposta di  $y$ .
- **Analisi della controllabilità:** verifica delle possibilità di influire su  $x$  e  $y$ , agendo opportunamente su  $u$
- **Analisi dell'osservabilità:** verifica delle possibilità di determinare  $x$ , note le funzioni di  $y$  e  $u$

19

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Movimento (o moto), traiettoria ed equilibrio



20

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Perchè “apprezzare” i sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi lineari stazionari o Lineari Tempo-Invarianti (LTI) le analisi citate si effettuano con “semplici” risultati di algebra lineare
- Dato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

La soluzione dell'equazione è data dalla *formula di Lagrange* :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

**Moto libero + moto forzato**

Inoltre, vale il principio della *sovrapposizione degli effetti*

## Esponenziale di matrice

- La formula di Lagrange si basa sull'**esponenziale di matrice**, calcolabile come estensione della funzione esponenziale scalare (tramite espansione in serie):

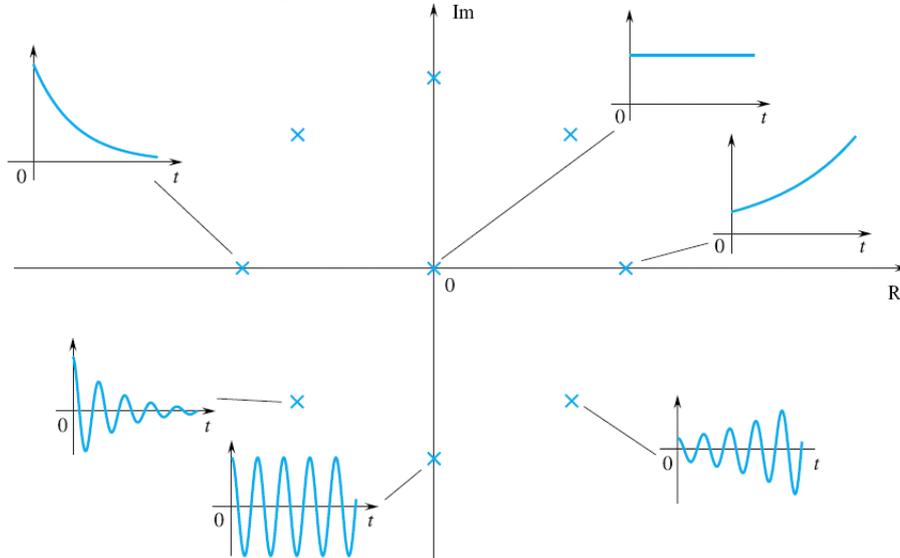
$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad a \in \mathbb{R}$$

Analogamente, è possibile definire l'esponenziale di una matrice come:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad \text{A matrice quadrata}$$

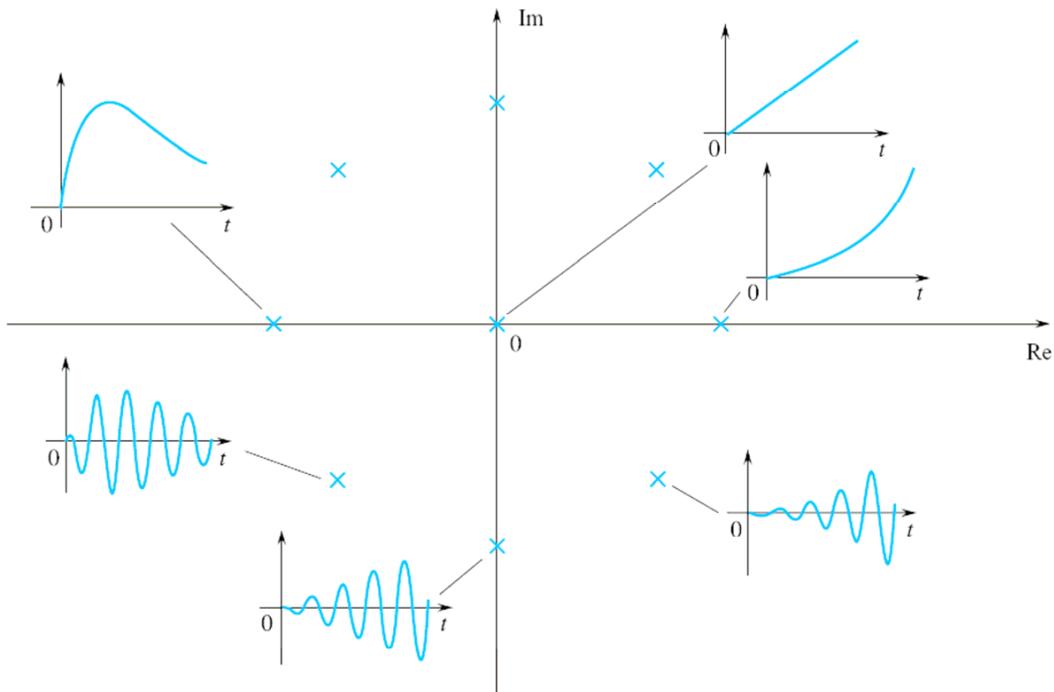
# Esponenziale di matrice e *modi*

- I movimenti liberi e forzati sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali di base, dette **modi**, il cui andamento dipende dagli **autovalori di A** e dalla loro **molteplicità**
- Es. con autovalori **singoli**



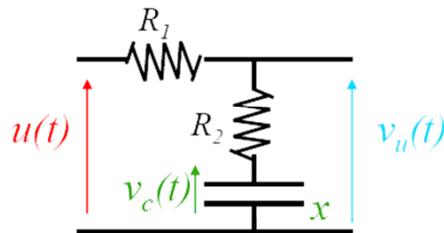
# Esponenziale di matrice e *modi*

- Es. con autovalori **doppi**

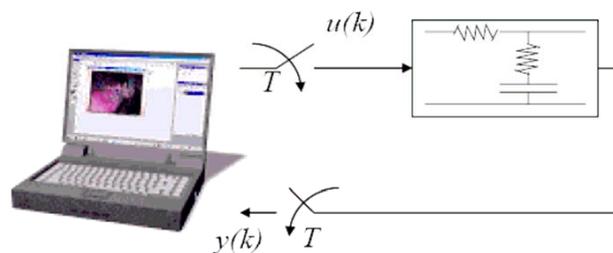


## Sistemi a tempo discreto

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema a tempo continuo viene accoppiato ad un elaboratore digitale



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t)\end{aligned}$$

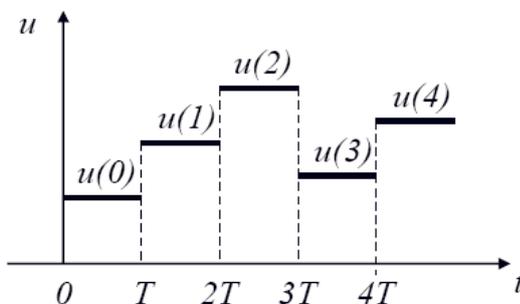


25

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Sistemi a tempo discreto

- Se si considera che all'ingresso venga applicata una funzione costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti  $kT$  in cui l'ingresso varia



$$\begin{aligned}x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k) \\ y(k) &= c_d x(k) + d_d u(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_d &= e^{aT}; & b_d &= \int_0^T e^{a(T-\tau)} b d\tau \\ c_d &= c; & d_d &= d\end{aligned}$$

26

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Sistemi a tempo discreto

- In generale, comunque si arrivi al modello MIMO

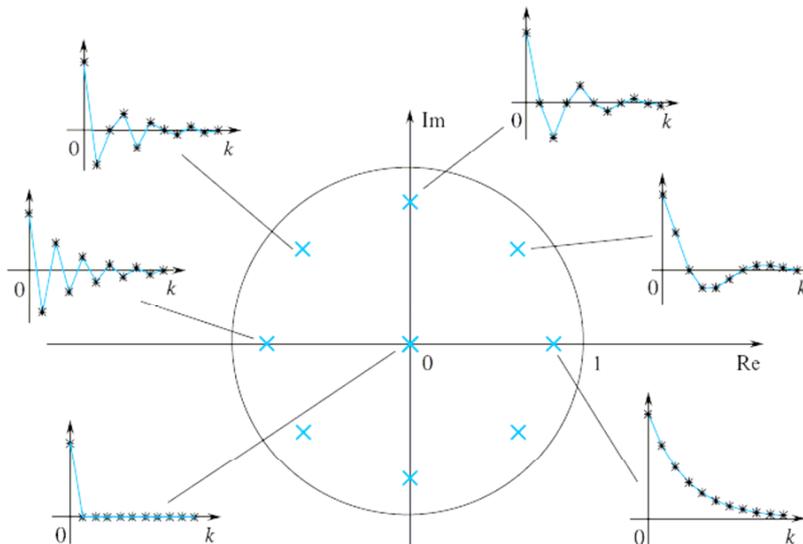
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

il movimento si può calcolare direttamente e in modo ancora più intuitivo:

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i)$$

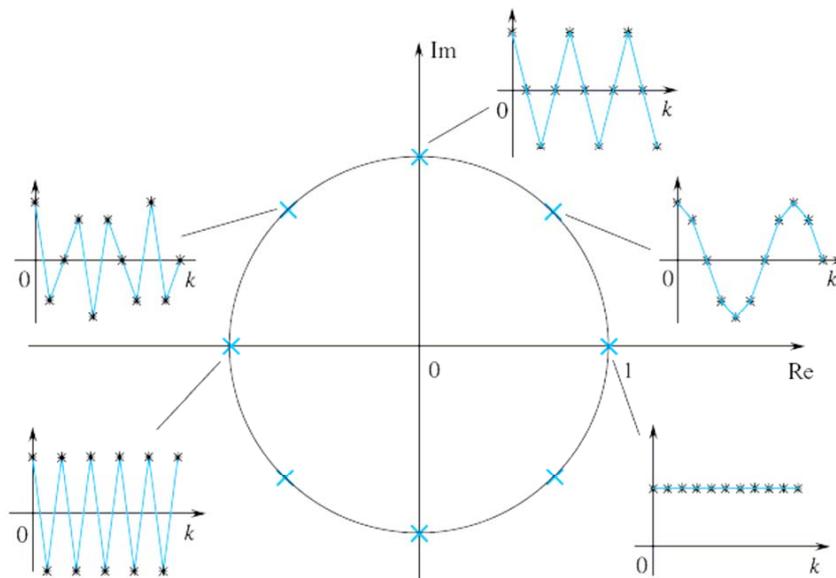
## Sistemi a tempo discreto e modi

- Sempre in funzione degli **autovalori di A**, ma... è diversa la relazione con la collocazione sul piano complesso, rispetto al tempo continuo
- Es. con autovalori **singoli** ( $|\lambda_i| < 1$ )



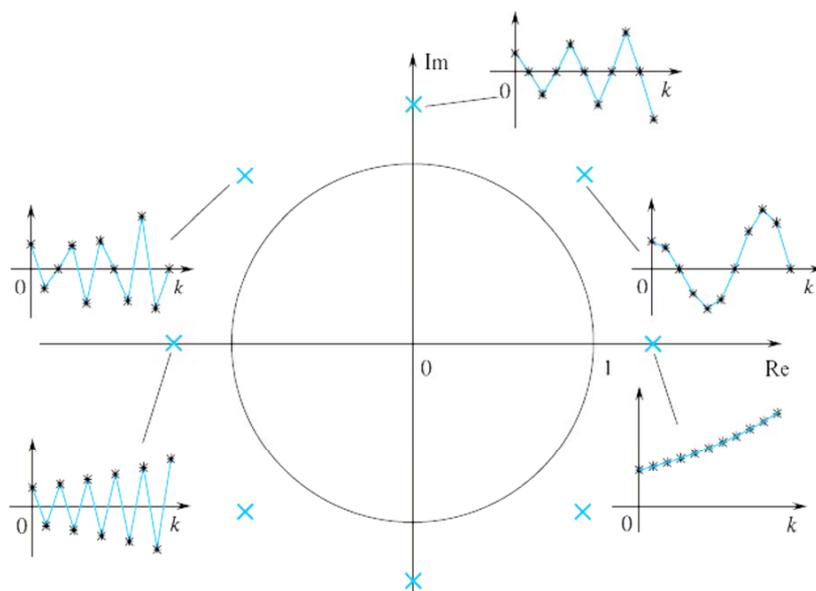
# Sistemi a tempo discreto e modi

➔ Es. con autovalori **singoli** ( $|\lambda_i| = 1$ )



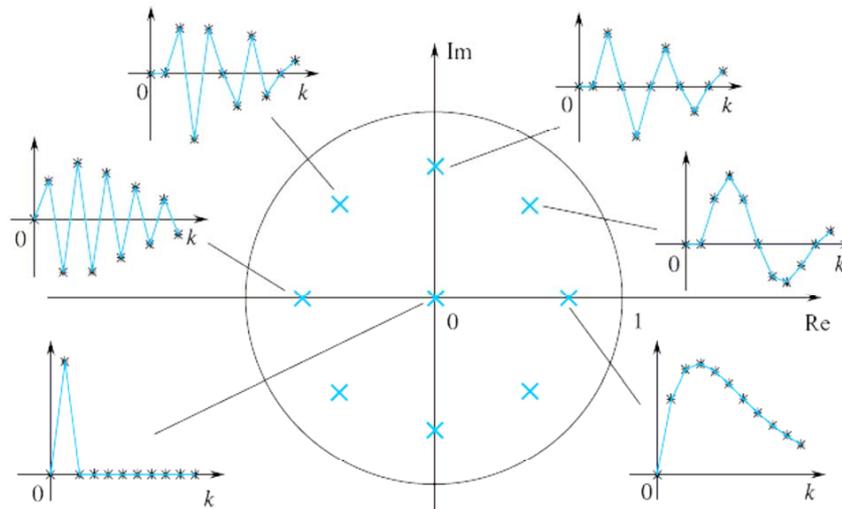
# Sistemi a tempo discreto e modi

➔ Es. con autovalori **singoli** ( $|\lambda_i| > 1$ )



## Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **doppi** ( $|\lambda_i| < 1$ )



31

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Stabilità

- In generale, si analizza la **stabilità dei punti di equilibrio e/o dei movimenti** di un sistema dinamico
- Con il termine **stabilità** si intende la capacità di un sistema di reagire con variazioni limitate del moto  $x(\cdot)$  a perturbazioni limitate dello stato iniziale  $x(t_0)$  (oppure dell'ingresso  $u(\cdot)$ )
- $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  : moto di riferimento
- $x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot))$  : moto perturbato, con perturbazione *sullo stato iniziale*  $\delta x_1(t_0)$
- $x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot))$  : moto perturbato, con perturbazione *sull'ingresso*  $\delta u(\cdot)$

32

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Stabilità: definizioni

➡ Dato  $\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t)$  si dice che **il moto di riferimento è (semplicemente) stabile** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che quando  $\|\delta x_1(t_0)\| < \delta$  risulta  $\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

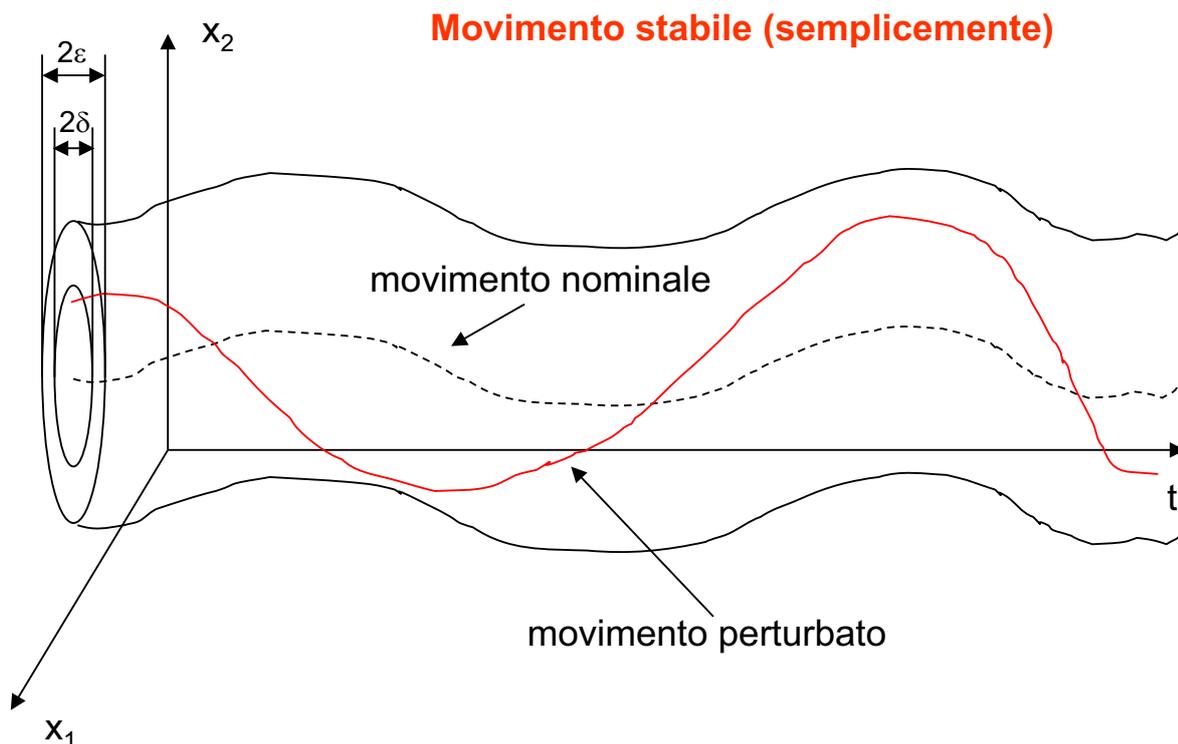
➡ Si dice che **il moto di riferimento è asintoticamente stabile** se, oltre ad essere semplicemente stabile, soddisfa la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

33

Richiami di Teoria dei Sistemi

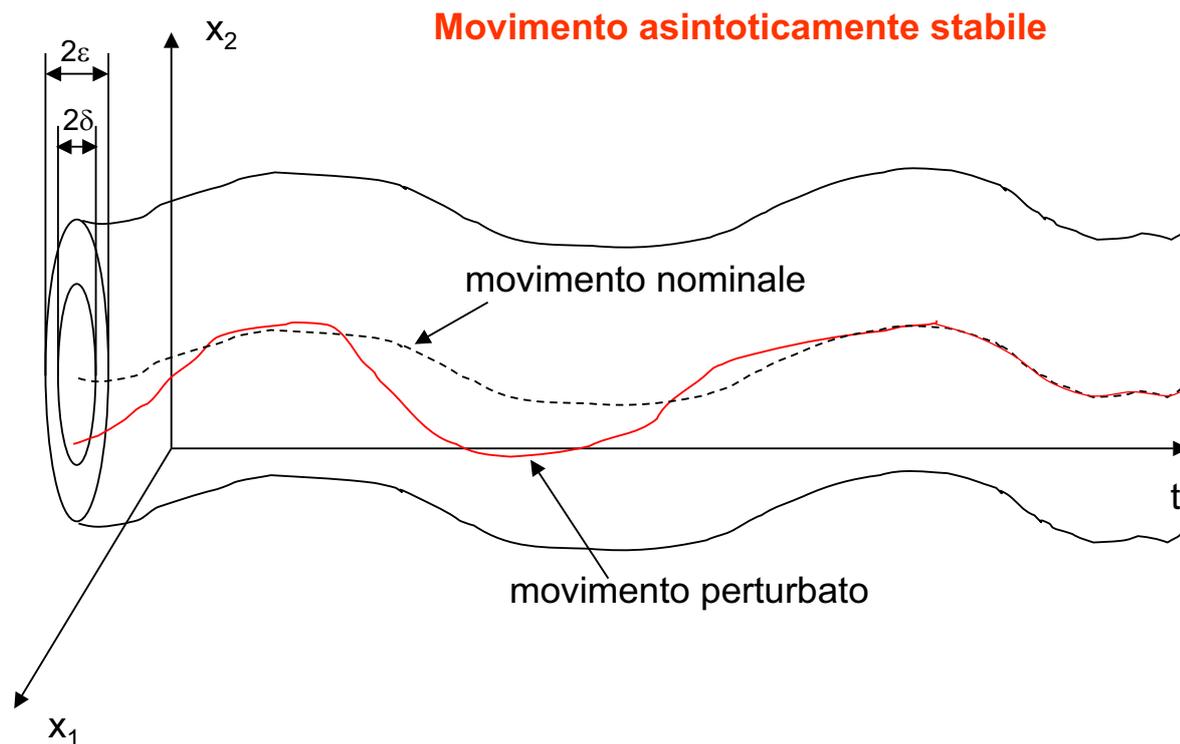
## Stabilità: interpretazione geometrica



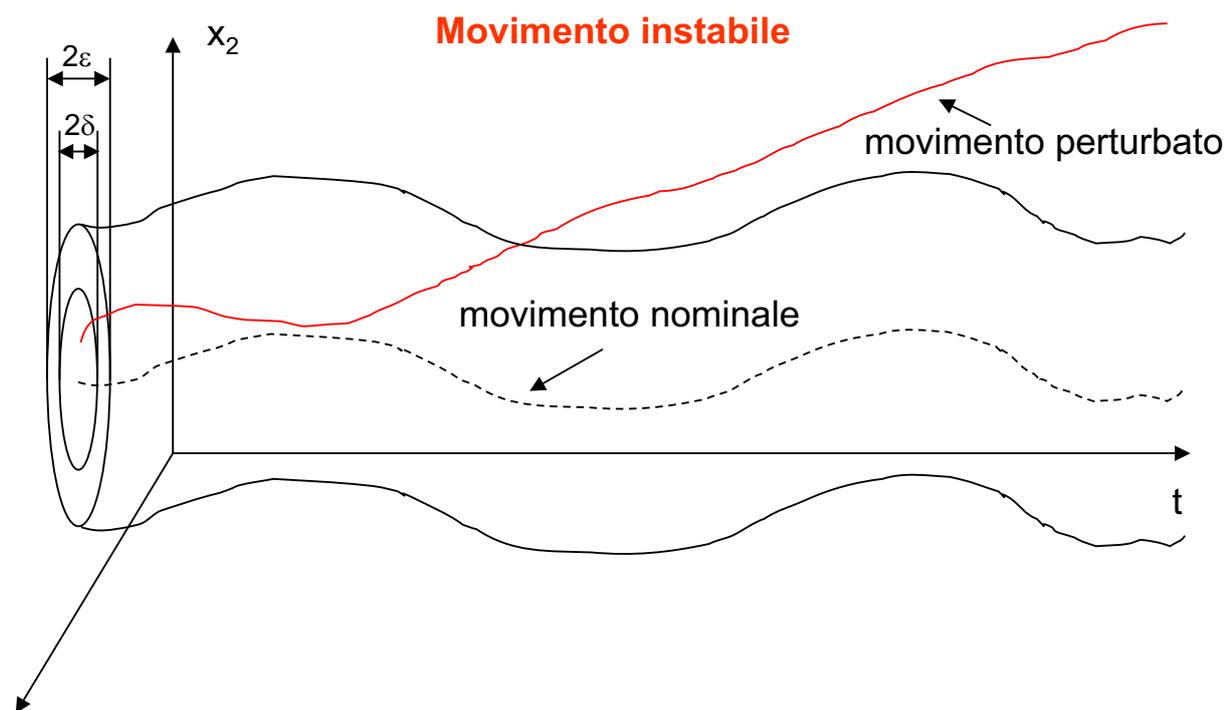
34

Richiami di Teoria dei Sistemi

# Stabilità: interpretazione geometrica - 1



# Stabilità: interpretazione geometrica - 2



## Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- ➡ Per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema** e non dei singoli punti di equilibrio o movimenti
- ➡ Se  $A$  è invertibile, il punto di equilibrio è unico

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- ➡ L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono solo dagli autovalori di  $A$  (i quali inoltre **NON** dipendono dalla rappresentazione, qualunque  $\bar{A}=T A T^{-1}$  ha gli stessi autovalori di  $A$ !)

## Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- ➡ **[TEOREMA]** Un sistema LTI **tempo-continuo** è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno **parte reale negativa**
- ➡ **[TEOREMA]** Un sistema LTI **tempo-discreto** è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno **modulo minore di 1**

## Raggiungibilità e Controllabilità

- ➡ **Obiettivo** dell'analisi: comprendere le possibilità di intervento su un sistema tramite l'azione di controllo (dualmente: stima tramite osservazioni)
- ➡ Tali proprietà del sistema sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione
- ➡ Inoltre, **NON** sono modificabili tramite il controllo
- ➡ **Raggiungibilità / Controllabilità:**
  - Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
  - Conseguenze: proprietà in catena chiusa

## Raggiungibilità (da $x(t_0)=x_0$ a ?)

Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza l'insieme degli stati che possono essere (appunto) **raggiunti** a partire da uno stato  $x_0$  e in intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  (con  $t_0 < t_1$ ), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile  $u(\cdot)$

**L'insieme degli stati raggiungibili** all'istante  $t_1$  a partire dall'evento  $(t_0, x_0)$  è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$$

## Controllabilità (da ?? a $x(t_1)=x_1$ )

Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza invece l'insieme degli stati di un sistema dinamico che possono essere **controllati** (*forzati*) ad un determinato stato finale  $x_1$  e in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  (con  $t_0 < t_1$ ), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile  $u(\cdot)$

**L'insieme degli stati controllabili** all'evento  $(t_1, x_1)$  a partire dall'istante  $t_1$  è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$$

## Raggiungibilità e controllabilità

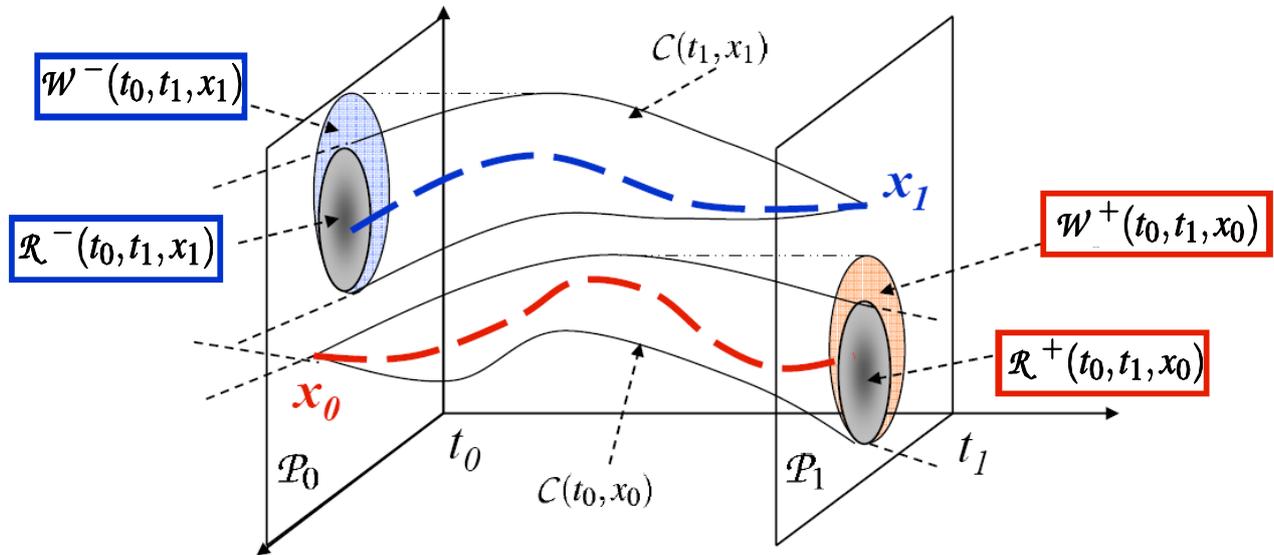
**Per estensione:**

**L'insieme degli stati raggiungibili** in un istante t qualunque dell'intervallo  $[t_0, t_1]$  a partire dall'evento  $(t_0, x_0)$  è indicato con  $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0)$

**L'insieme degli stati controllabili** all'evento  $(t_1, x_1)$  a partire da un istante t qualunque dell'intervallo  $[t_0, t_1]$  è indicato con  $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_1)$

# Interpretazione geometrica

$C(t_1, x_1)$  e  $C(t_0, x_0)$ : insiemi dei moti cui appartengono  $(t_1, x_1)$  e  $(t_0, x_0)$



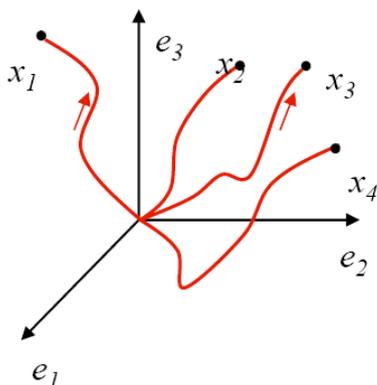
**NOTA:** per i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), tali proprietà non dipendono da  $t_0$  e  $t_1$  ma solo da  $t=t_1-t_0$  e si può considerare  $x = 0$  come unico punto di interesse

# Raggiungibilità e Controllabilità complete

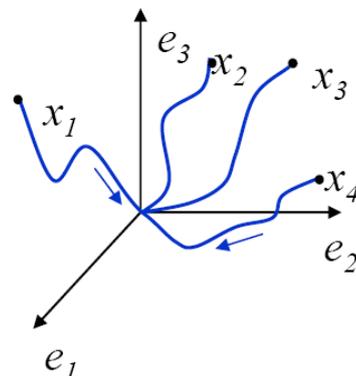
► Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

È **completamente raggiungibile** se qualunque stato può essere raggiunto da  $x=0$  in un tempo finito



È **completamente controllabile** se  $x=0$  può essere raggiunto da qualunque stato in  $t$  finito



## Raggiungibilità e risposta forzata

- La possibilità di considerare  $x=0$  come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente alla risposta forzata:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{TEMPO CONTINUO}$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \text{TEMPO DISCRETO}$$

## Raggiungibilità dei sistemi LTI t.discreti

- Insieme di stati raggiungibili in  $k$  passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad x(0) = 0$$

$$x(1) = Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

...

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- Perciò:  $\mathcal{R}_k^+(0) = \text{im}\{ [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B] \}$

= **sottospazio stati raggiungibili in  $k$  passi**

## Sottospazio raggiungibile

- L'insieme (*sottospazio*) degli stati raggiungibili in  $n$  passi è anche l'insieme degli stati raggiungibili **dal sistema**
- Infatti, oltre gli  $n$  passi non è utile proseguire per via del teorema di Cayley-Hamilton, dal quale risulta che:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I$$

e si definisce il **sottospazio raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = \text{im}\{[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]\}$$

## Teorema di Cayley-Hamilton

- Data la matrice  $A$   $n \times n$  e il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \end{aligned}$$

la matrice  $A$  è tale che

$$p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

e pertanto:

$$A^n = -a_1A^{n-1} - \dots - a_n$$

## Matrice di raggiungibilità

- Poiché il sottospazio raggiungibile è:

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{ [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \}$$

si definisce **matrice di raggiungibilità**:

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Il sistema è **completamente raggiungibile**

( $\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n$ ) se e solo se:

$$rank(P) = n$$

## Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, sistemi equivalenti, per i quali cioè:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= T^{-1}B\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}_k^+(0) &= im\{ [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{k-1}\bar{B}] \} \\ &= im\{ T^{-1} [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B] \} \\ &= T^{-1}\mathcal{R}_k^+(0)\end{aligned}$$

per cui tali sottospazi hanno la stessa dimensione

## Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

- Si consideri ancora  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$   
con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo  $x(0) \neq 0$ ,  
in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

- $x(0) \neq 0$  è **controllabile** in k passi se  $-A^k x(0)$   
è **raggiungibile** in k passi

$$A^k x(0) \in \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{k-1} B \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{R}_k^+(0)$$

## Raggiungibilità dei sistemi LTI continui

- Analogamente, per determinare gli stati  
**raggiungibili** di  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  :

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau$$

- Dal teorema di Cayley-Hamilton si può esprimere:

$$e^{A\tau} = I\gamma_0(\tau) + A\gamma_1(\tau) + \dots + A^{n-1}\gamma_{n-1}(\tau)$$

con  $\gamma_i(\tau)$  opportune funzioni scalari

- Si ottiene quindi:

$$x(t) = B \int_0^t \gamma_0(\tau) u(t-\tau) d\tau + AB \int_0^t \gamma_1(\tau) u(t-\tau) d\tau + \dots + \\ + A^{n-1} B \int_0^t \gamma_{n-1}(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

## Controllabilità dei sistemi LTI continui

- Per  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  uno stato  $x(0) \neq 0$  è **controllabile** (a 0) al tempo  $t$  se esiste una funzione di ingresso ammissibile  $u(\cdot)$  tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero  $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$ , e si possono quindi applicare considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza

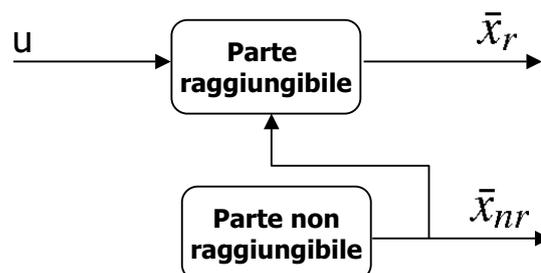
- Anche per i sistemi LTI continui, controllabilità e raggiungibilità sono caratterizzate dal rango di:

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

## Forma canonica di raggiungibilità: scomposizione

- Se il sistema non è completamente raggiungibile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



## Considerazioni “applicative”

- ➡ Le proprietà analizzate permettono di progettare leggi di controllo in **catena aperta**, ma a **minima energia** (es. per sistemi t.discreto, basate sulla (pseudo)inversa della matrice  $P^+$ )
- ➡ Nel progetto di controllo in **catena chiusa** (es. retroazione dello stato), occorre considerare che il controllore non è in grado di agire sulla parte non raggiungibile del sistema (qualora sia presente).
- ➡ Se la parte non raggiungibile è stabile, allora il sistema è (almeno..) **stabilizzabile**

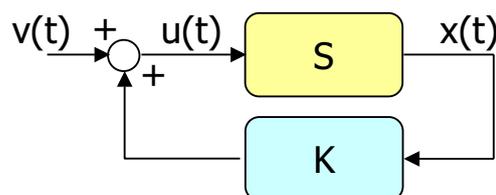
## Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- ➡ Infatti, dato un sistema LTI completamente raggiungibile

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e ipotizzando che  $x$  sia completamente **misurabile**, la legge di controllo con retroazione dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$



con  $\dim(K) = m \times n$ , permette di modificare arbitrariamente gli autovalori del sistema

## Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- ➡ Il sistema in catena chiusa diventa infatti

$$S_K = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = (C + DK)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

i cui autovalori sono ovviamente quelli di  $A+BK$

- ➡ **ATTENZIONE:** se il sistema NON è completamente raggiungibile, è possibile modificare SOLO gli autovalori della parte raggiungibile
- ➡ Se gli autovalori della parte NON raggiungibile sono a parte reale negativa, il sistema (come detto) viene definito **stabilizzabile**

## Osservabilità e ricostruibilità

- ➡ Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di determinare lo stato iniziale  $x(t_0)$  o finale  $x(t_f)$  di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita  $u[t_0, t_1], y[t_0, t_1]$
- ➡ Anche tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta dello stato), ma possono essere influenzate dal controllo
- ➡ **Analisi** di osservabilità / ricostruibilità:
  - Applicazione: progetto di algoritmi di stima e ricostruzione dello stato

## Osservabilità e ricostruibilità - 1

Formalmente, si possono dare le **[Definizioni]**:

- ➡ Un sistema si dice **completamente osservabile** in  $[t_0, t_1]$  se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita  $u[t_0, t_1], y[t_0, t_1]$  consente di determinare univocamente lo stato iniziale  $x(t_0)$  per ogni  $u[t_0, t_1]$
- ➡ Un sistema si dice **completamente ricostruibile** in  $[t_0, t_1]$  se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita  $u[t_0, t_1], y[t_0, t_1]$  consente di determinare univocamente lo stato finale  $x(t_f)$  per ogni  $u[t_0, t_1]$

## Osservabilità e risposta libera

- ➡ Nei sistemi LTI, per l'analisi di osservabilità e ricostruibilità è possibile:
  - considerare solo la prima proprietà, poiché essa implica la seconda (noto  $x(t_0)$  è possibile calcolare  $x(t_f)$ )
  - analizzare solo la risposta libera, poiché per la sovrapposizione degli effetti è l'unica parte della risposta che dipende dallo stato iniziale:

$$y(t) = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{Risposta forzata}}$$

**Risposta libera** + **Risposta forzata**

## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI

- Per risolvere il problema di osservabilità, si può considerare il sistema libero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- L'obiettivo è determinare in modo univoco lo stato conoscendo l'uscita, operazione immediata (per ogni  $t$ ) se  $C$  è invertibile:

$$x(t) = C^{-1}y(t)$$

- Se  $C$  non è invertibile, si può tentare di ricavare una relazione invertibile derivando l'uscita:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 1

- L'operazione di derivata sull'uscita si può ripetere fino all'ordine  $n-1$ , sempre con l'obiettivo di ricavare una relazione invertibile uscita-stato:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre l'ordine  $n-1$

## Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 2

- ➡ In modo analogo, per sistemi discreti si può esprimere la possibilità di osservazione dello stato iniziale analizzando le uscite dei primi  $n-1$  passi:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

- ➡ Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre il passo  $n-1$

## Matrice di osservabilità

- ➡ [Def.] Si definisce **matrice di osservabilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione  $[n \times (n \ m)]$

$$Q = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$

o equivalentemente:

$$Q^T = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$$

- ➡ Il sistema è **completamente osservabile e completamente ricostruibile** se e solo se:

$$\text{rango}(Q^T) = n$$

## Osservabilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia  $x = Tz \iff z = T^{-1}x$  :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{C} &= CT\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di osservabilità:

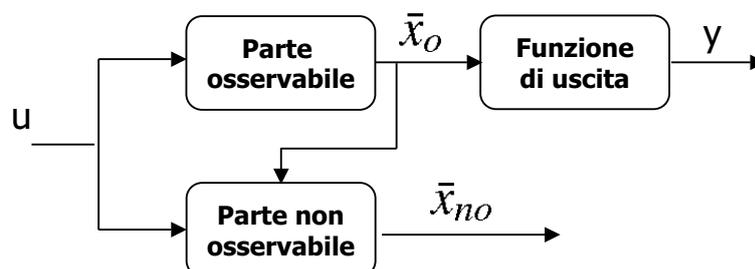
$$\begin{aligned}\hat{Q} &= [\hat{C} \quad \hat{C}\hat{A} \quad \hat{C}\hat{A}^2 \quad \dots \quad \hat{C}\hat{A}^{n-1}]^T \\ &= [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T T \\ &= QT\end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di osservabilità

## Forma canonica di osservabilità: scomposizione

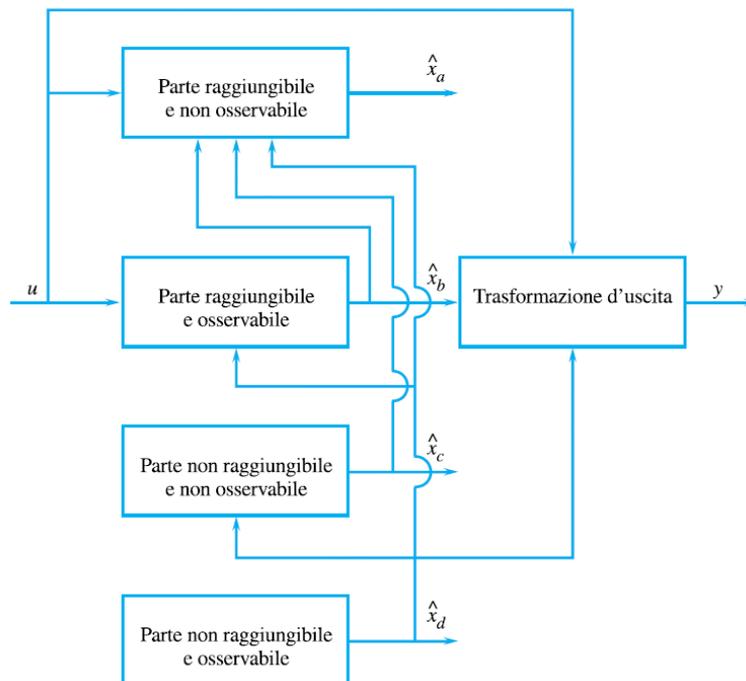
- Se il sistema non è completamente osservabile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = (\bar{C}_1 \quad 0) \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} \end{cases}$$



## Scomposizione canonica

► Unendo le due trasformazioni viste



67

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)

► Dato:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \end{cases}$$

68

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Dualità - 1

- Il numero di ingressi (uscite) di  $S$  corrisponde al numero di uscite (ingressi) di  $S_D$
- Le matrici di raggiungibilità e osservabilità di  $S_D$  ( $P_D$  e  $Q_D$ ) sono legate a quelle di  $S$  ( $P$  e  $Q$ ) come segue:

$$P_D = (C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = Q^T$$
$$Q_D = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B)^T = P^T$$

69

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Dualità - 2

- Risulta pertanto:

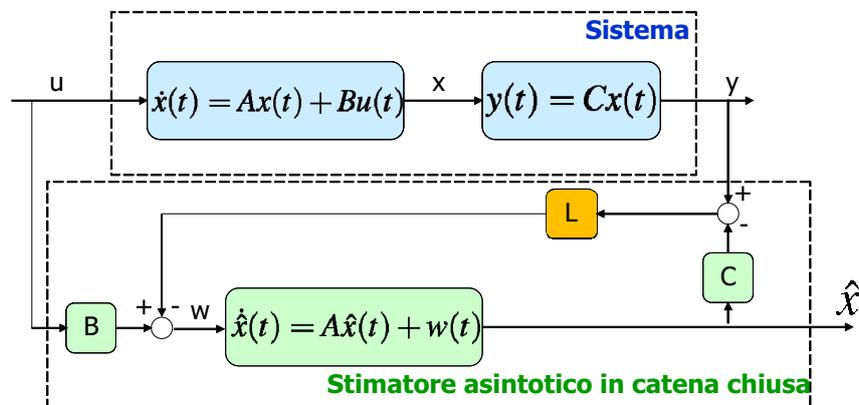
$$\begin{aligned} \mathbf{S \text{ stabile}} &\iff \mathbf{S_D \text{ stabile}} \\ \mathbf{S \text{ ragg.-contr.}} &\iff \mathbf{S_D \text{ oss.-ric.}} \\ \mathbf{S \text{ oss.-ric.}} &\iff \mathbf{S_D \text{ ragg.-contr.}} \end{aligned}$$

70

Richiami di Teoria dei Sistemi

## Considerazioni “applicative”

- Il progetto di stimatori asintotici dello stato in catena chiusa:



può, grazie alla proprietà di dualità, essere effettuato sfruttando i metodi di allocazione degli autovalori per il progetto di controllori con retroazione dello stato.

## Dinamica dell'osservatore asintotico

- Infatti, le equazioni dell'osservatore dello stato in catena chiusa sono:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A + LC)\hat{x}(t) - Ly(t) + Bu(t)$$

- Definendo  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  la dinamica dell'errore è

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) = \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t) = (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A + LC)e(t) \end{aligned}$$

i cui autovalori sono quelli di  $A+LC$ . Se la coppia  $(A,C)$  è osservabile, per dualità la coppia  $(A^T,C^T)$  è raggiungibile e gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati in modo arbitrario.

## Progetto osservatore e rilevabilità

- ➡ Analogamente al caso del progetto di controllo, gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati arbitrariamente SOLO se il sistema è completamente osservabile
- ➡ Se non lo è, è ancora possibile costruire un osservatore asintotico purchè gli autovalori della parte non osservabile siano a parte reale negativa
- ➡ Il sistema in tal caso viene detto **rilevabile**

## Controllo con retroazione dello stato stimato

- ➡ In generale, le variabili di stato non sono TUTTE misurabili direttamente, ma se il sistema è osservabile si può sfruttare il progetto di un osservatore ANCHE realizzare il controllo con retroazione completa dello stato (stimato)
- ➡ La dinamica del sistema complessivo diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases}$$

o in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BK\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC + BK)\hat{x}(t) - LCx(t) \end{cases}$$

## Principio di separazione

- Esprimendo la dinamica in termini di  $x(t)$ , stato reale, ed  $e(t)$ , errore di stima:

$$\begin{cases} \begin{matrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{matrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{pmatrix}}^{A_R} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ y(t) = (C \ 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

i cui autovalori sono costituiti dall'unione di quelli di  $A+BK$  con quelli di  $A+LC$ .

- Questi autovalori sono assegnabili arbitrariamente e **separatamente** per la parte di controllo e di osservazione