

## Capitolo 2

# Aerostato ad aria calda

### 2.1 Modellazione matematica

Si consideri l'aerostato ad aria calda (comunemente detto “mongolfiera”) mostrato in Figura 2.1. Come noto, questo tipo di velivoli può essere manovrato variando l'altitudine, agendo sulla potenza erogata dal riscaldatore all'interno della struttura gonfiabile, in modo da cercare e sfruttare correnti d'aria orientate nelle direzioni di interesse per la navigazione.

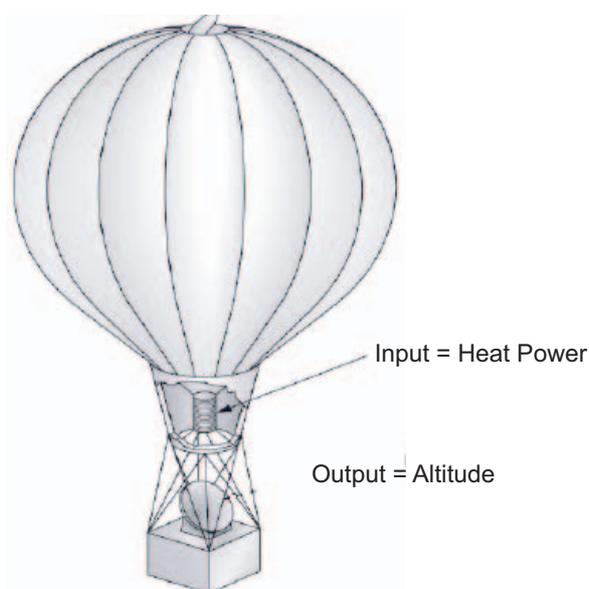


Figura 2.1: Aerostato ad aria calda (mongolfiera)

Considerando unicamente le variazioni di altitudine (dinamica verticale), il modello matematico del sistema può essere ricavato considerando che esso è costituito da una parte termica, che determina il riscaldamento dell'aria contenuta nella mongolfiera, ed una parte meccanica, nella quale la spinta di galleggiamento determina le variazioni di quota.

Il sottosistema termico è descrivibile per analogia con i circuiti elettrici di tipo resistenza-condensatore, associando le differenze di temperatura ad una tensione e il flusso di calore trasmesso per conduzione ad una corrente elettrica. Con queste analogie, l'aria contenuta all'interno dell'aerostato si comporta come un condensatore, caratterizzato da una capacità termica proporzionale al volume, alla densità dell'aria ed al suo calore specifico, mentre la conduzione di calore tra l'aria interna al pallone e quella esterna è caratterizzata da una certa resistenza termica. La parte termica del modello è pertanto riconducibile al circuito di Figura 2.2:

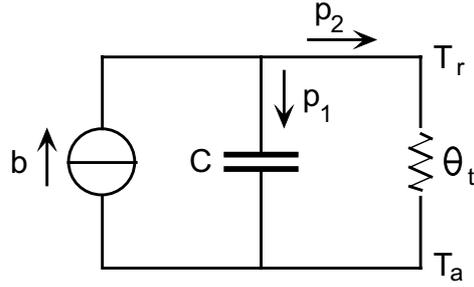


Figura 2.2: Circuito elettrico equivalente alla dinamica termica dell'aerostato

nel quale  $b$  indica la potenza in ingresso, erogata dal bruciatore,  $p_1$  la potenza accumulata dall'aerostato,  $p_2$  la potenza condotta verso l'aria esterna,  $T_r$  e  $T_a$  rispettivamente la temperatura interna alla mongolfiera e quella esterna, mentre  $\theta_t$  e  $C$  sono la resistenza termica offerta dalla superficie del pallone e la capacità termica di quest'ultimo.

Le equazioni che caratterizzano il circuito sono:

$$\begin{aligned} b &= p_1 + p_2 \\ \frac{d(T_r - T_a)}{dt} &= \frac{p_1}{C} \\ T_r - T_a &= \theta_t p_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definendo  $V$  il volume totale del pallone,  $\rho_a$  la densità dell'aria alla temperatura  $T_a$ ,  $c_a$  il calore specifico dell'aria e supponendo che tutte queste grandezze siano costanti, si possono esprimere, sulla base di note formule valide per gas ideali, le equazioni che determinano la capacità termica e la densità dell'aria riscaldata:

$$C = V \rho_a c_a$$

$$\rho_r T_r = \rho_a T_a$$

Infine, ricordando che la spinta di galleggiamento del pallone è determinata dalla differenza di densità tra l'aria riscaldata e quella esterna (per il principio di Archimede):

$$F_{spinta} = V(\rho_a - \rho_r)g$$

nella quale  $g$  è la nota costante di accelerazione gravitazionale, è possibile definire l'equazione caratteristica della dinamica verticale dell'aerostato tramite il bilancio delle forze (indicando con  $f$  il coefficiente di attrito viscoso che caratterizza la resistenza aerodinamica):

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} + f \frac{dh}{dt} + mg = F_{spinta} \quad (2.2)$$

Imponendo le seguenti scelte sulle variabili di stato, ingresso ed uscita:  $x_1 = T_r$ ,  $x_2 = h$ ,  $x_3 = \dot{h}$ ,  $y = x_2$  e  $u = b$ , si ottiene il seguente modello nonlineare nello spazio degli stati, affine nel controllo e SISO:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{C \theta_t} (T_a - x_1) + \frac{1}{C} u \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{V \rho_a g}{m} \left( 1 - \frac{T_a}{x_1} \right) - \frac{f}{m} x_3 - g \end{aligned} \quad (2.3)$$

del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [T_r \quad h \quad \dot{h}]^T$  e

$$\mathbf{f} = \left[ \frac{1}{C\theta_t}(T_a - x_1) \quad x_3 \quad \frac{V\rho_a g}{m} \left(1 - \frac{T_a}{x_1}\right) - \frac{f}{m}x_3 - g \right]^T$$

$$\mathbf{b} = \left[ \frac{1}{C} \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$h = x_2$$

## 2.2 Analisi dell'equilibrio

Si può facilmente verificare che gli stati di equilibrio del sistema non dipendono dalla particolare quota alla quale si vuole far volare l'aerostato. Imponendo che questa quota sia costante ( $x_3 = 0$ , condizione necessaria per l'equilibrio) si determina univocamente la temperatura  $T_r$  necessaria per mantenere la mongolfiera immobile e, di conseguenza, il calore che il bruciatore deve erogare per bilanciare esattamente la dispersione termica verso l'aria circostante. Formalmente, la famiglia di punti che soddisfa la condizione di equilibrio è:

$$\mathbf{x}_e = \left[ \frac{T_a}{1 - m/V\rho_a} \quad x_{2d} \quad 0 \right]^T$$

con:

$$u_e = \frac{x_{1e} - T_a}{\theta_t} = \frac{T_a m}{(V\rho_a - m)\theta_t}$$

Si noti che per questa famiglia di punti di equilibrio l'unico parametro che si può effettivamente considerare variabile in modo significativo, in funzione delle condizioni operative del velivolo, è la temperatura ambiente  $T_a$ .

Il calcolo della linearizzazione approssimata permette di ottenere le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C\theta_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(V\rho_a - m)^2}{V\rho_a m T_a} & 0 & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Feedback Linearization

Si può dimostrare con alcuni passaggi che il sistema ha grado relativo pari a 3, pertanto la feedback linearization ingresso-uscita porta anche ad una linearizzazione completa ingresso-stato. Ponendo come nuove variabili di stato:

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T = [x_2 - x_{2d} \quad x_3 \quad -g - \frac{f}{m}x_3 + \frac{gV}{m} \left(1 - \frac{T_a}{x_1}\right) \rho_a]^T$$