

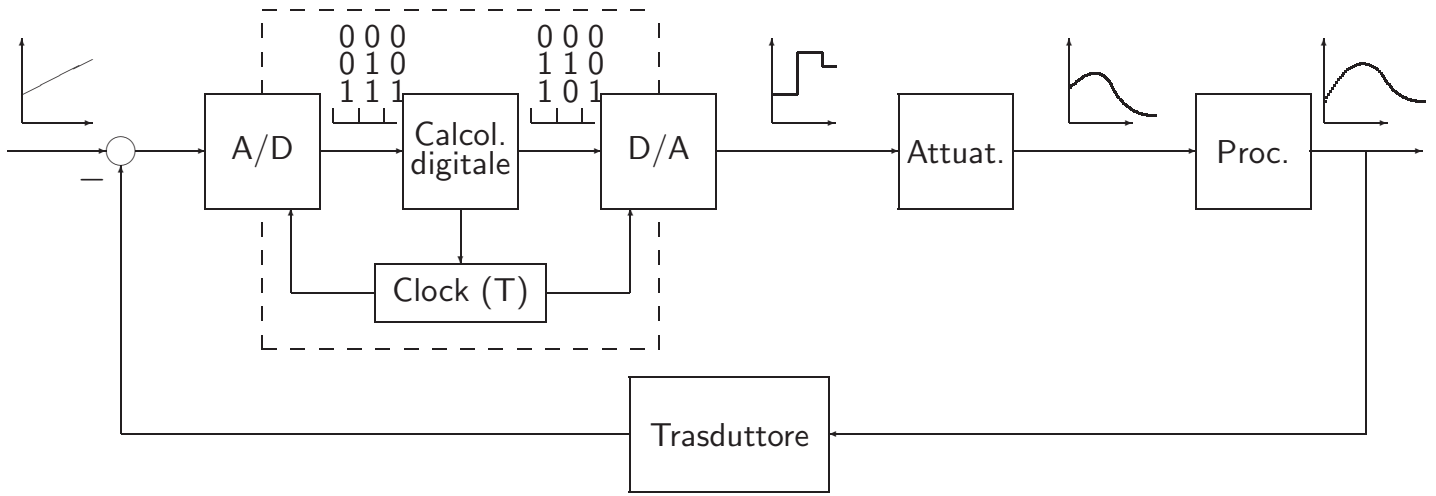
Sistemi di controllo digitale

Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un sistema digitale per l'elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

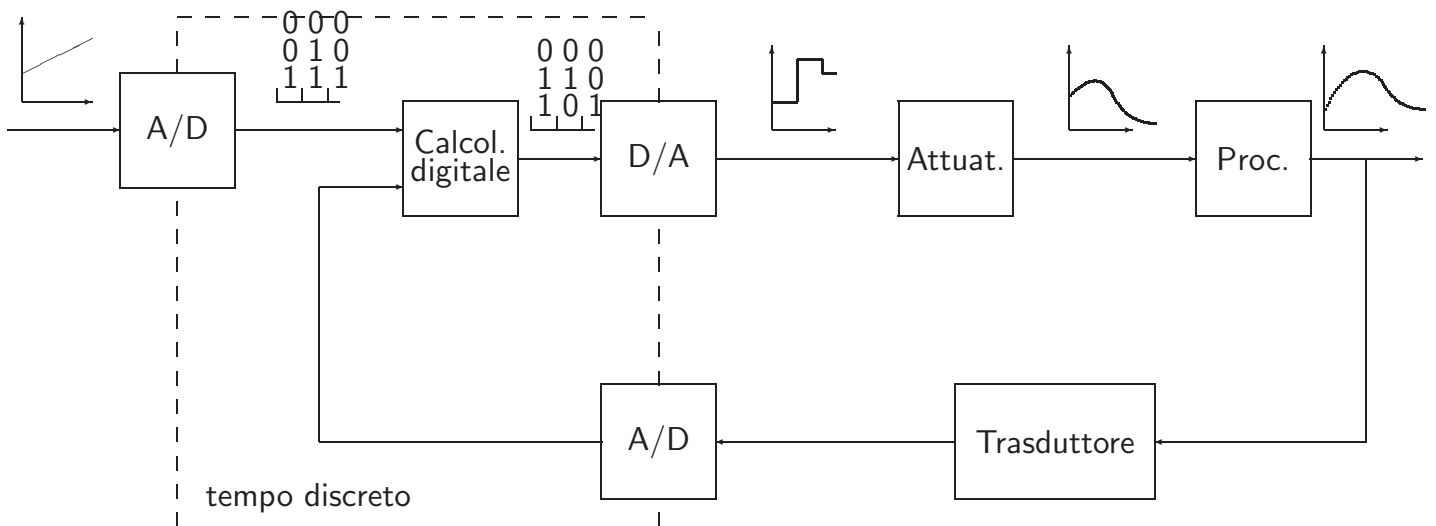
Perchè il controllo digitale ?

- 😊 Flessibilità del sistema di controllo.
- 😊 Prestazioni del sistema di controllo.
- 😊 Colloquio con sistemi di supervisione.
- 😞 Complessità di progetto

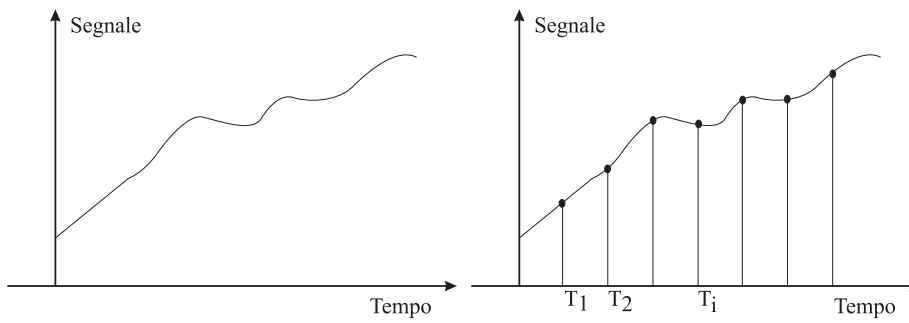
Schema tipico di un controllo digitale



Schema tipico di un controllo digitale

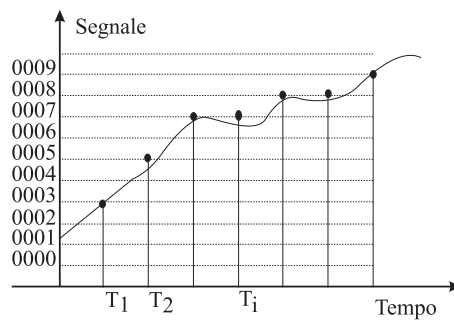


Segnali continui, campionati e quantizzati



(a) Segnale analogico

(b) segnale campionato



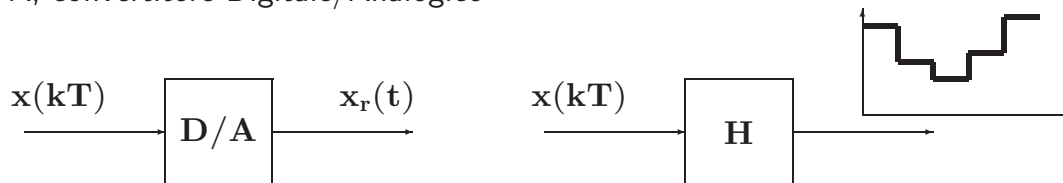
(c) Segnale quantizzato

Dispositivi di interfaccia

- A/D, convertitore Analogico/Digitale



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



Ipotesi di lavoro.

1. Il tempo di **elaborazione** è trascurabile rispetto al tempo di **campionamento**.
2. L'errore di quantizzazione è trascurabile (lunghezza di parola ALU del calcolatore grande).

Caratteristiche del controllo digitale

- Il modello del sistema complessivo ha due caratteristiche:
 - Il processo/impianto: modello **a tempo continuo**
 - Il controllore: legge di controllo **a tempo discreto**
- Il segnale digitale ha le proprietà di essere:
 - **Campionato** \Rightarrow definito agli istanti kT , $k = 0, 1, \dots$
 - **Quantizzato** \Rightarrow rappresentato da un numero finito di bits.
- Strumento matematico per il trattamento dei segnali digitali:
 - Equazioni alle differenze e **Traformata Zeta**

Equazioni alle differenze.

- Permettono di rappresentare sistemi la cui relazione **ingresso-uscita** dipende dal tempo, valutato ad istanti discreti.
- Esempio:

Dato un capitale $y(kT)$ valutato nel periodo kT , un tasso di interesse a ed un versamento $u(kT)$ effettuato sempre nello stesso periodo kT , calcolare il capitale nel periodo successivo $y((k+1)T)$.

- soluzione:
$$y((k+1)T) = ay(kT) + u(kT)$$

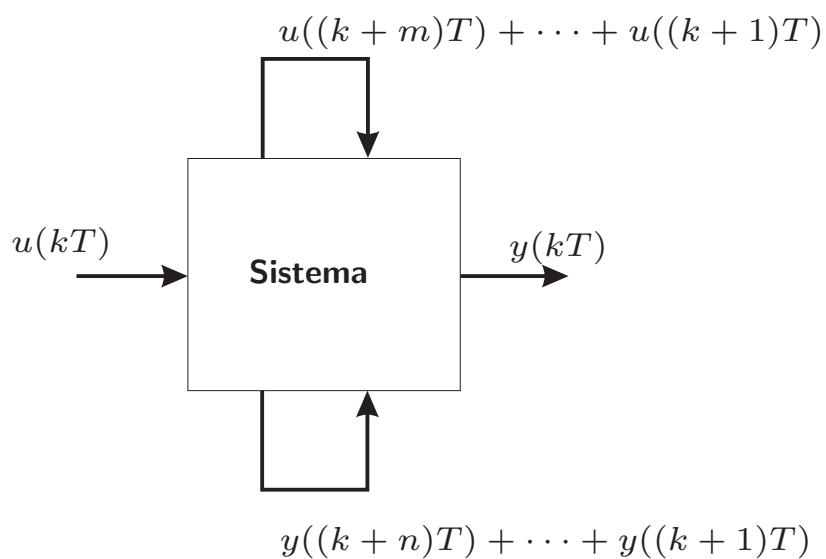
Equazione alle differenze lineare ordinaria di ordine n .

In generale un sistema dinamico definito a tempo discreto può essere rappresentato da una **equazione alle differenze** del tipo:

$$y((k + n)T) + a_{n-1}y((k + n - 1)T) + \dots + a_1y((k + 1)T) + a_0y(kT) = b_m u((k + m)T) + b_{m-1}u((k + m - 1)T) + \dots + b_1u((k + 1)T) + b_0u(kT)$$

dove i coefficienti a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 e b_{m-1}, \dots, b_1, b_0 sono costanti.

L'equazione alle differenze rappresenta la struttura del sistema, mentre i coefficienti a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 e b_{m-1}, \dots, b_1, b_0 sono i parametri del modello.



A cosa serve l'equazione alle differenze?

- ☹️ **Predizione:** Risolvendola, conoscendo il valore dell'ingresso $u(kT)$ in un certo intervallo $k \in [k_0, k_n]$ ed una condizione iniziale $y(k_0T)$, posso predire il valore dell'uscita $y(kT)$ nello stesso intervallo.
- 😊 **Analisi:** Mediante una semplice analisi dei coefficienti a_{n-1}, \dots , posso determinare alcune caratteristiche del sistema, valide in generale qualunque sia il particolare ingresso applicato.

Note sul lucido 13

Esempio in Matlab:

Considero un capitale iniziale di 1.000.000, a cui aggiungo il primo anno 300.000, il secondo 400.000 ed il terzo 500.000, con un interesse del 10 %, qual è il capitale all'inizio del quarto anno?

Nota: l'interesse del 10% si traduce in un coefficiente $a = 1.1$. Cosa accadrebbe se il coefficiente fosse di $a = 0.5$?

Strumenti matematici

La Trasformata Zeta è una funzione complessa di variabile complessa, utilizzata per analizzare i modelli matematici (equazioni alle differenze) dei sistemi fisici definiti a tempo discreto.

Z-Trasformata

- Sia data una sequenza di valori $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \dots$ e nulla per $k < 0$.
La \mathcal{Z} -trasformata (unilatera) della sequenza \mathbf{x}_k è la funzione di variabile complessa \mathbf{z} definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{z}) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}_k] &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{z}^{-1} + \dots + \mathbf{x}_k \mathbf{z}^{-k} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k \mathbf{z}^{-k} \end{aligned}$$

- Nel caso in cui la sequenza di valori \mathbf{x}_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo \mathbf{T} un segnale continuo descritto dalla funzione $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\mathbf{T})$.

- L'espressione estesa

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(T)z^{-1} + \mathbf{x}(2T)z^{-2} + \dots + \mathbf{x}(kT)z^{-k} + \dots$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento T**, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{X}(s)]$$

intendendo:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)]\Big|_{t=kT}\right\}\right]$$

Trasformata Z dell'impulso unitario.

- **Impulso discreto unitario.**

$$\mathbf{x}(kT) = \begin{cases} 1 & kT = 0 \\ 0 & kT \neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\mathbf{x}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \dots = 1 \end{aligned}$$

Trasformata Z del gradino unitario.

- **Gradino unitario:** Sia data la funzione gradino unitario:

$$x(kT) = h(kT) = \begin{cases} 1 & kT \geq 0 \\ 0 & kT < 0 \end{cases}$$

- La trasformata \mathcal{Z} vale:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

- La serie è convergente per $|z| > 1$.

Trasformata Z della Rampa unitaria.

- **Rampa unitaria.** Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(kT) = \begin{cases} kT & kT \geq 0 \\ 0 & kT < 0 \end{cases}$$

- La \mathcal{Z} -trasformata è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[kT] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

Proprietà della trasformata \mathcal{Z} (1).

- Linearità:

$$\mathcal{Z}[k_1 f_1(kT) + k_2 f_2(kT)] = k_1 \mathcal{Z}[f_1(kT)] + k_2 \mathcal{Z}[f_2(kT)]$$

Proprietà della trasformata \mathcal{Z} (2).

Teorema della traslazione nel tempo. Sia $\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}(kT)]$, e $n = 1, 2, \dots$, allora

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(kT - nT)] = z^{-n} \mathbf{X}(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(kT + nT)] = z^n \left[\mathbf{X}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(kT) z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

- In modo impreciso ma operativo:

$$z^{-1}x(kT) = x((k-1)T)$$

$$z^{-2}x(kT) = x((k-2)T)$$

$$z x(kT) = x((k+1)T)$$

e così via.

Funzione di trasferimento discreto di un sistema.

- La **Funzione di Trasferimento discreto** di un sistema è una funzione a variabile complessa $G(z)$ che caratterizza completamente il sistema fisico in esame.
- La risposta del sistema a **qualunque** segnale di ingresso può essere determinata attraverso la funzione di trasferimento:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

dove $U(z)$ e $Y(z)$ sono le trasformate dei segnali di ingresso e di uscita del sistema.

La funzione di trasferimento di un sistema può essere determinata dalla equazione differenziale del sistema, applicando le proprietà della trasformata Zeta:

$$s^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_1 z Y(z) + a_0 Y(z) = b_m z^m U(z) + b_{m-1} z^{m-1} U(z) + \dots + b_1 z U(z) + b_0 U(z)$$

da cui:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

- Se utilizziamo come ingresso il **segnale impulsivo** $U(z) = 1$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{1}$$

otteniamo che la **funzione di trasferimento** discreto del sistema è uguale alla \mathcal{Z} -trasformata del segnale di uscita del sistema.

Equazione caratteristica.

- L'**equazione caratteristica** di un sistema si ottiene prendendo il **denominatore** della funzione di trasferimento ed uguagliandolo a zero.

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

- Le **soluzioni** di tale equazione algebrica vengono dette **poli** del sistema.
- I poli di un sistema descrivono completamente il suo comportamento dinamico.

Stabilità di un sistema a tempo discreto.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita.
- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita

Il campionamento di segnali continui.

- Nella automazione industriale i sistemi di interesse (attuatori elettrici, sistemi meccanici,) hanno un comportamento intrinsecamente a tempo continuo.
- La necessità di operare a tempo discreto nasce dall'utilizzo dei calcolatori.
- Occorre definire un metodo per tradurre i segnali a tempo continuo in segnali a tempo in modo da minimizzare la perdita di contenuto informativo.

lezione 1

- **PROCESSO:**

Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

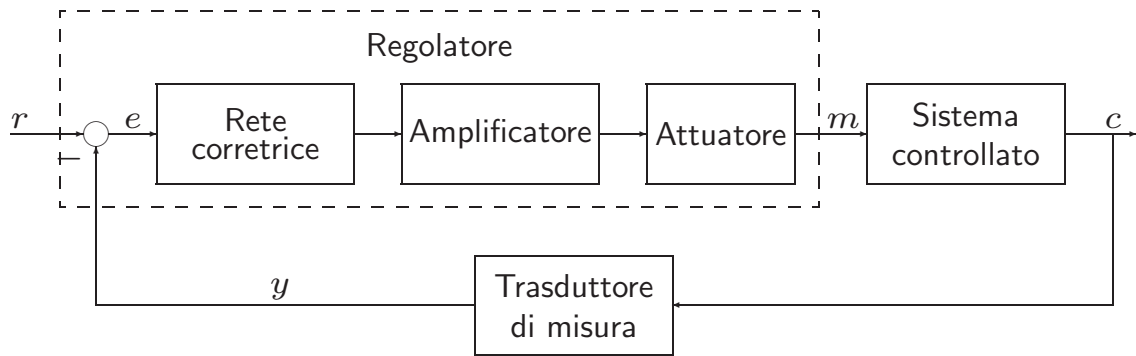
- **CONTROLLO DEI PROCESSI:**

Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

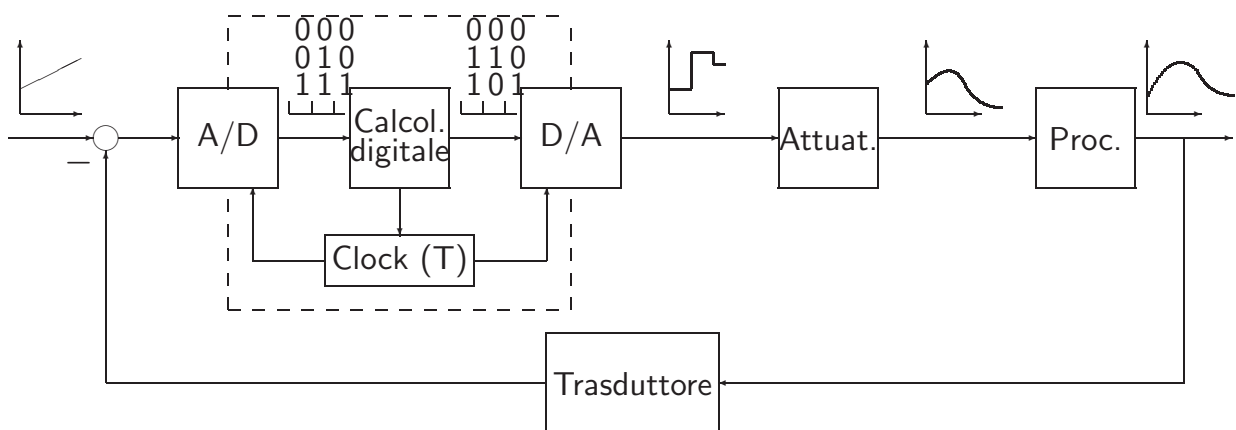
- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:**

Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

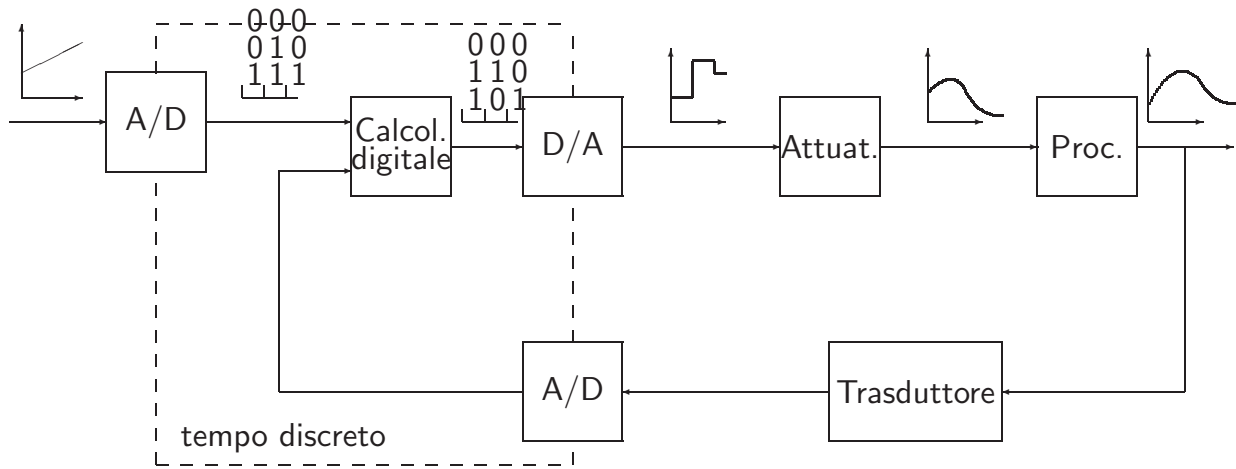
SCHEMA TIPICO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO



SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (1)



SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (2)

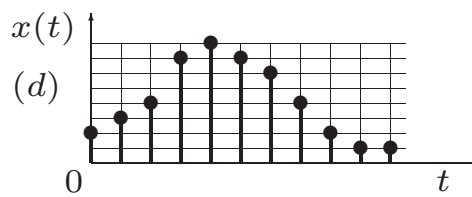
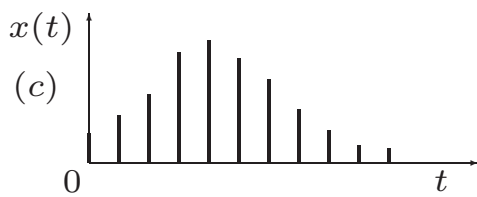
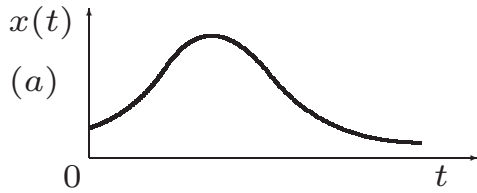


● CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO :

- + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
- + Maggiore flessibilità
- + Maggiore affidabilità e ripetibilità
- + Maggiore trasmissibilità dei segnali
- Progettazione più difficile e articolata
- Stabilizzabilità più precaria
- Possibilità di arresti non previsti
- Necessità di utilizzare energia elettrica

SEGNALI DI INTERESSE

a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale

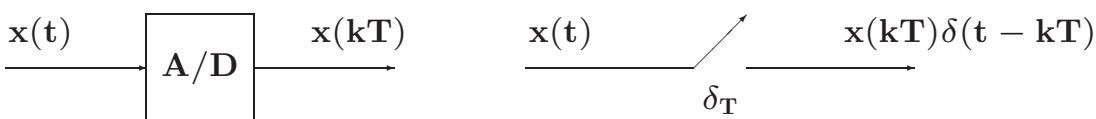


DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

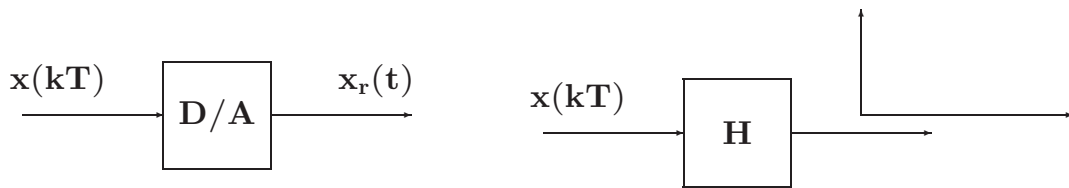
- A/D, convertitore Analogico/Digitale



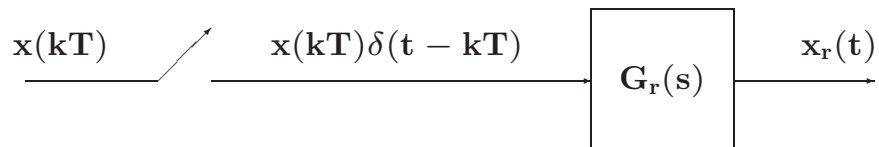
Con campionamento modellato ad impulsi di Dirac:



- **D/A, convertitore Digitale/Analogico**



Modello:



Caso dell'Hold:

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

ANELLO DI CONTROLLO DIGITALE

- Parte tempo continua: processo/impianto
- Parte tempo discreta: sistema di controllo
- Campionamento regolare di periodo T
- Trasformata Zeta

lezione 2

- **Equazione alle differenze:**

$$\mathbf{u}_k = f(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$$

Se $f(\cdot)$ è lineare:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \dots - \mathbf{a}_n \mathbf{u}_{k-n} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k + \dots + \mathbf{b}_m \mathbf{e}_{k-m}$$

Esempio:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_{k-2} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k - \nabla \mathbf{u}_k$$

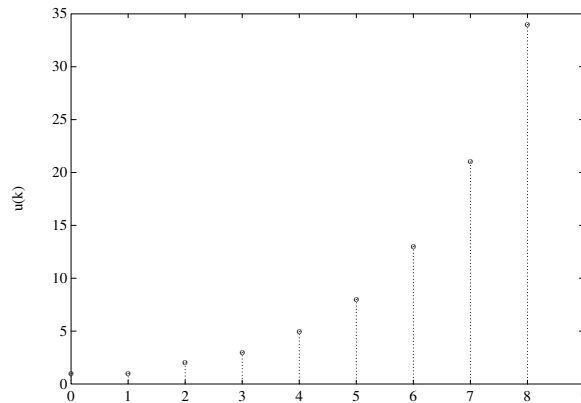
$$\mathbf{u}_{k-2} = \mathbf{u}_k - 2\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^2 \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{a}_2 \nabla^2 \mathbf{u}_k - (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) \nabla \mathbf{u}_k + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 + 1) \mathbf{u}_k = \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k$$

- **Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti**

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-2} \quad k \geq 2$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{1}.$$



- **Soluzione elementare tipo z^k :**

$$\mathbf{c}z^k = \mathbf{c}z^{k-1} + \mathbf{c}z^{k-2}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale vale:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{c}_1 z_1^k + \mathbf{c}_2 z_2^k$$

con $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ determinate dalle condizioni iniziali per $k = 0, 1$. Infine si ha

$$\mathbf{u}_k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Andamento divergente, dunque sistema instabile.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita
- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita

- Sia data una sequenza di valori $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}$, definita per $\mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots$ e nulla per $\mathbf{k} < 0$. **La \mathcal{Z} -trasformata (unilatera) della sequenza \mathbf{x}_k** è la funzione di variabile complessa \mathbf{z} definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{z}) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}_k] &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{z}^{-1} + \dots + \mathbf{x}_k \mathbf{z}^{-k} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k \mathbf{z}^{-k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori \mathbf{x}_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo \mathbf{T} un segnale continuo descritto dalla funzione $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\mathbf{T})$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) \mathbf{z}^{-k}$$

- L'espressione estesa

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(T) z^{-1} + \mathbf{x}(2T) z^{-2} + \dots + \mathbf{x}(kT) z^{-k} + \dots$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento T**, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{X}(s)]$$

intendendo:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z} \left[\left\{ \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)] \Big|_{t=kT} \right\} \right]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $\mathbf{X}(z)$ assume in generale una espressione **razionale fratta** del tipo

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{b}_0 z^m + \mathbf{b}_1 z^{m-1} + \dots + \mathbf{b}_m}{z^n + \mathbf{a}_1 z^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di z^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \frac{z^n (\mathbf{b}_0 z^{-(n-m)} + \mathbf{b}_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + \mathbf{b}_m z^{-n})}{z^n (1 + \mathbf{a}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{a}_n z^{-n})} \\ &= \frac{\mathbf{b}_0 z^{-(n-m)} + \mathbf{b}_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + \mathbf{b}_m z^{-n}}{1 + \mathbf{a}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{a}_n z^{-n}} \end{aligned}$$

- **Esempio:**

$$\mathbf{X}(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2 z^{-1})}$$

- **Impulso discreto unitario**, detta anche funzione di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & t = 0 \\ \mathbf{0} & t \neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\mathbf{x}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \\ &= \mathbf{1} + \mathbf{0}z^{-1} + \mathbf{0}z^{-2} + \mathbf{0}z^{-3} + \dots = \mathbf{1} \end{aligned}$$

- **Gradino unitario**: Sia data la funzione gradino unitario

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & t \geq 0 \\ \mathbf{0} & t < 0 \end{cases}$$

La funzione $\mathbf{h}(k)$ definita come

$$\mathbf{h}(k) = \begin{cases} \mathbf{1} & k = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{0} & k < 0 \end{cases}$$

è detta **sequenza unitaria**. Si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \mathcal{Z}[\mathbf{h}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= \mathbf{1} + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - z^{-1}} = \frac{z}{z - \mathbf{1}} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > 1$.

- **Rampa unitaria.** Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poichè $x(kT) = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$, la \mathcal{Z} -trasformata è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) \\ &= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- **Funzione potenza a^k .** Sia data la funzione

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con a costante reale o complessa. Dalla definizione di \mathcal{Z} -trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per $|z| > |a|$.

- **Funzione esponenziale.** Sia data la funzione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove a è una costante reale o complessa. Poichè $\mathbf{x}(kT) = e^{-akT}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

che converge per $|z| > e^{-\operatorname{Re}(a)T}$. Si noti che per $a = 0$ si ha il gradino unitario.

- **Funzione sinusoidale.** Sia data la sinusoide

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- **Funzione cosinusoidale.** Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

- **Funzione cosinusoidale smorzata.** Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{1}{2} \mathcal{Z}[(e^{-at} e^{j\omega t} + e^{-at} e^{-j\omega t})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-(a-j\omega)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(a+j\omega)T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})e^{-aT} z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- **Funzione sinusoidale smorzata**

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z} \left[e^{-at} \sin \omega t \right] \\ &= \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT} z \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- Le trasformate delle funzioni di maggior interesse sono solitamente riportate in **tabelle**

lezione 3

- **Esempio:** $\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
- Prima tecnica: $\mathbf{x}(t) = 1 - e^{-t}$

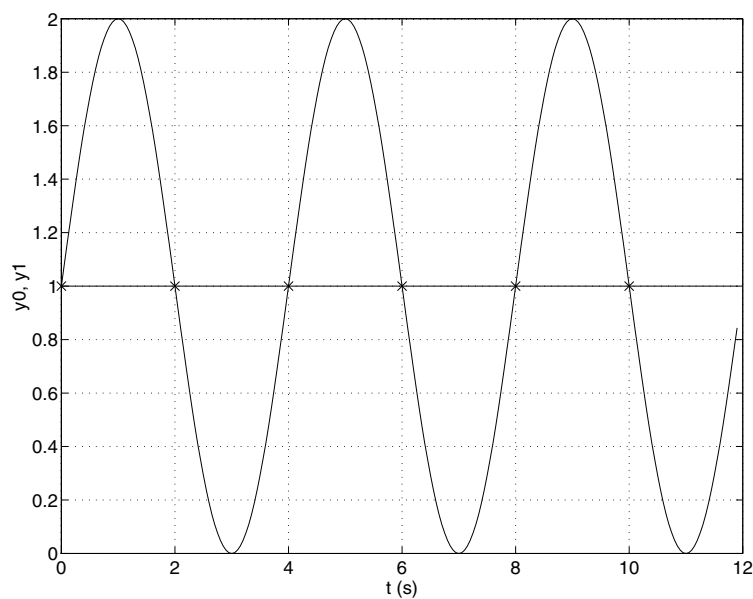
$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} \\ \mathbf{X}(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \end{aligned}$$

- La \mathcal{Z} -trasformata $\mathbf{X}(z)$ e la sua sequenza corrispondente $\mathbf{x}(k)$ sono legate da una **corrispondenza biunivoca**
- Questo **non** avviene in genere tra la \mathcal{Z} -trasformata $\mathbf{X}(z)$ e la sua "inversa" $\mathbf{x}(t)$
- Data una $\mathbf{X}(z)$ si possono in genere avere **molte** $\mathbf{x}(t)$
- Questa ambiguità **non** sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su \mathbf{T} dettate dal **Teorema di Shannon**

- **Diverse** funzioni tempo continuo possono avere gli **stessi** valori $\mathbf{x}(k)$



- **PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA \mathcal{Z} -TRASFORMATA**

- **Linearità:**

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

- **Moltiplicazione per a^k .** Sia $X(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata di $x(t)$, a una costante.

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (a^{-1}z)^{-k} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

- **Teorema della traslazione nel tempo.** Se $x(t) = 0, t < 0$, $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, e $n = 1, 2, \dots$, allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}X(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

Operativamente:

$$z^{-1}x(k) = x(k - 1)$$

$$z^{-2}x(k) = x(k - 2)$$

$$z x(k) = x(k + 1)$$

e così via.

- **Caso di ritardo:**

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT - nT)z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT - nT)z^{-(k-n)}\end{aligned}$$

da cui, ponendo $\mathbf{m} = k - n$,

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} \mathbf{x}(mT)z^{-m}$$

Poichè $\mathbf{x}(mT) = \mathbf{0}$ per $m < 0$, allora si può scrivere che

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}(mT)z^{-m} = z^{-n}\mathbf{X}(z)$$

- **Caso dell'anticipo:**

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t + nT)] =$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT + nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT + nT)z^{-(k+n)} \\ &= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT + nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \right] \\ &= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \right] \\ &= z^n \left[\mathbf{X}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \right]\end{aligned}$$

- **Teorema del valore iniziale.**

Se $\mathbf{X}(z)$ è la \mathcal{Z} -trasformata di $\mathbf{x}(t)$ e se esiste il $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{X}(z)$, allora il valore iniziale $\mathbf{x}(0)$ di $\mathbf{x}(t)$ è dato da:

$$\mathbf{x}(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{X}(z)$$

Infatti, si noti che

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k} = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)z^{-1} + \mathbf{x}(2)z^{-2} + \dots$$

- **Teorema del valore finale.** Siano tutti i poli di $\mathbf{X}(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1})\mathbf{X}(z) \right]$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1)z^{-k} = \mathbf{X}(z) - z^{-1}\mathbf{X}(z) \\ \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1)z^{-k} \right] = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)] \\ & = [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(-1)] + [\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)] + [\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1)] + \dots \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- **Esempio:** Si consideri il segnale descritto da

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza $\mathbf{x}(k\mathbf{T})$ è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k\mathbf{T}) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mathbf{T}(z+1)}{2(z-0.5)} \\ &= 2\mathbf{T} \end{aligned}$$

- **Differenziazione complessa:**

$$\mathcal{Z}[k \mathbf{x}(k)] = -z \frac{d}{dz} \mathbf{X}(z)$$

$$\mathcal{Z}[k^m \mathbf{x}(k)] = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^m \mathbf{X}(z)$$

- **Esempio:** È noto che la \mathcal{Z} -trasformata del gradino unitario è

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}(\mathbf{k})] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1}}$$

Per ottenere la trasformata del segnale rampa unitaria

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = \mathbf{kT}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{kT} \mathbf{h}(\mathbf{k})] = -\mathbf{Tz} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}z} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1}} \right) = \mathbf{T} \frac{\mathbf{z}^{-1}}{(\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1})^2}$$

- **Integrazione complessa.**

Si consideri la sequenza

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}$$

dove $\mathbf{x}(\mathbf{k})/\mathbf{k}$ è finito per $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, e sia $\mathcal{Z}[\mathbf{x}(\mathbf{k})] = \mathbf{X}(\mathbf{z})$. La \mathcal{Z} -trasformata di $\mathbf{x}(\mathbf{k})/\mathbf{k}$ è data da

$$\mathcal{Z} \left[\frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}} \right] = \int_{\mathbf{z}}^{\infty} \frac{\mathbf{X}(\zeta)}{\zeta} \mathbf{d}\zeta + \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}$$

- **Teorema della convoluzione reale.** Siano date due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$, con $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $t < 0$ e \mathcal{Z} -trasformate $X_1(z)$, $X_2(z)$. Allora

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(hT)x_2(kT - hT) \right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h) \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \end{aligned}$$

poichè $x_2(k-h) = 0$, $h > k$. Definendo $m = k - h$ si ha

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h) \right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(m)z^{-m}$$

- **Teorema della convoluzione complessa.**

Siano date due successioni $x_1(k)$, $x_2(k)$ nulle per $k < 0$. Inoltre siano $X_1(z)$ e $X_2(z)$ le trasformate delle due successioni e siano R_1 , R_2 i rispettivi raggi di convergenza. Allora la \mathcal{Z} -trasformata del prodotto $x_1(k)x_2(k)$ è data da:

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta$$

- **Teorema di Parseval.** Siano date due sequenze $x_1(k)$, $x_2(k)$ nulle per $k < 0$. Inoltre siano $X_1(z)$ e $X_2(z)$ le trasformate delle due successioni.

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]]_{|z|=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta \end{aligned}$$

Per $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X(\zeta) X(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-1} X(z) X(z^{-1}) dz \end{aligned}$$

- **Trasformazione di funzioni periodiche.**

Sia data una successione $x_p(k)$ periodica di periodo pT e $x(k)$ la successione dei campioni del primo periodo e nulla per $k > p$

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \dots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se $X(z)$ è la \mathcal{Z} -trasformata di $x(k)$ allora vale

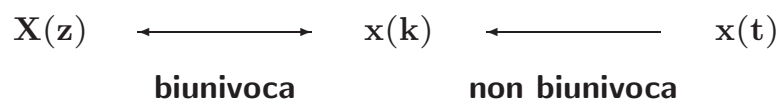
$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

Lezione 4

Antitrasformata zeta.

- **LA ANTITRASFORMATA \mathcal{Z}**

- Permette di passare da una \mathcal{Z} -trasformata $\mathbf{X}(z)$ alla corrispondente sequenza \mathbf{x}_k e possibilmente alla funzione continua $\mathbf{x}(t)$ cui corrisponde per campionamento la sequenza \mathbf{x}_k .



- Se è soddisfatto il **Teorema di Shannon** sul campionamento, la funzione continua $\mathbf{x}(t)$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza \mathbf{x}_k .

- Diversi **metodi per antitrasformare** una funzione $\mathbf{X}(z)$:

- 1) Metodo della lunga divisione;
- 2) Metodo computazionale;
- 3) Metodo della scomposizione in fratti semplici;
- 4) Metodo dell'integrale di inversione.

- **Metodo della lunga divisione**

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k\mathbf{T})z^{-k} = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(\mathbf{T})z^{-1} + \mathbf{x}(2\mathbf{T})z^{-2} + \dots$$

Si divide il polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore con la nota regola di Eulero

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1z + \dots + \mathbf{b}_mz^m}{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1z + \dots + \mathbf{a}_nz^n} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1z^{-1} + \mathbf{c}_2z^{-2} + \dots$$

da cui si ricava che

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{x}(\mathbf{T}) = \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{x}(2\mathbf{T}) = \mathbf{c}_2, \quad \dots$$

- **Esempio:** Lunga divisione di:

$$X(z) = \frac{3}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{6}{2 - 5z^{-1} + 4z^{-2} - z^{-3}}$$

6					$\frac{D(z)}{Q(z)}$
6	$-15z^{-1}$	$+12z^{-2}$	$-3z^{-3}$		
	$+15z^{-1}$	$-12z^{-2}$	$+3z^{-3}$		
	$+15z^{-1}$	$-37.5z^{-2}$	$+30z^{-3}$	$-7.5z^{-4}$	
		$+25.5z^{-2}$	$-27z^{-3}$	$+7.5z^{-4}$	
		$+25.5z^{-2}$	$-63.75z^{-3}$	$+51z^{-4}$	$-12.75z^{-5}$
			$+36.75z^{-3}$	$-43.5z^{-4}$	$+12.75z^{-5}$

Da cui

$$X(z) = 3 + 7.5z^{-1} + 12.75z^{-2} + 18.375z^{-3} + \dots$$

$$x(0) = 3, \quad x(1) = 7.5, \quad x(2) = 12.75, \quad x(3) = 18.375, \quad \dots$$

- **Metodo computazionale.** Esempio:

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1}$$

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1}U(z)$$

$$X(z) \left(1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3} \right) = 3U(z)$$

$$x(k) = 2.5x(k - 1) - 2x(k - 2) + 0.5x(k - 3) + 3u(k)$$

Per $k = 0$, $u(0) = 1$, $x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$:

$$x(0) = 3$$

$$x(1) = 2.5x(0) = 7.5$$

$$x(2) = 2.5x(1) - 2x(0) = 12.75$$

$$x(3) = 2.5x(2) - 2x(1) + 0.5x(0) = 18.375$$

...

- **Metodo della scomposizione in fratti semplici**

$$\mathbf{X}(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

- **Caso 1.** Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$\mathbf{X}(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti c_i , detti "residui", sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i)\mathbf{X}(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di $\mathbf{X}(z)$ compare almeno **uno zero nell'origine**, si utilizza la funzione $\mathbf{X}(z)/z$ e quindi

$$\frac{\mathbf{X}(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} \quad c_i = \left[(z - p_i) \frac{\mathbf{X}(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti **poli complessi coniugati**, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

- **Caso 2.** Se $X(z)$, o $X(z)/z$, ha **poli multipli**

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \dots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \dots, h; \quad k = 1, \dots, r_i$$

- **Esempio.** Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{(z+2)} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{(z+1)}$$

$$c_{11} = [(z+2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1$$

$$c_{12} = \left[\frac{d}{dz} (z+2)^2 X(z) \right]_{z=-2} = 2$$

$$c_{21} = [(z+1)^2 X(z)]|_{z=-1} = 1$$

$$c_{22} = \left[\frac{d}{dz} (z+1)^2 X(z) \right]_{z=-1} = -2$$

- Metodo dell'integrale di inversione

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si può applicare il **teorema dei residui**

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^m k_i$$

Per poli semplici

$$k_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \left[(z - z_i) X(z) z^{k-1} \right]$$

Per poli di molteplicità r_i

$$k_i = \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} \left[(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1} \right]$$

- **Esempio.** Calcolare $x(kT)$ da

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

dove i residui sono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = 1$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} \left[(z - e^{-aT}) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = -e^{-akT}$$

• **Esempio:**
$$\mathbf{X}(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

$$\mathbf{X}(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} \left[\frac{(z-1)^2 z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \right] \\ &= \frac{k+1}{1-e^{-aT}} - \frac{1}{(1-e^{-aT})^2} \end{aligned}$$

- **Esempio.** Antitrasformare la funzione

$$\mathbf{X}(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

Si noti che ora

$$\mathbf{X}(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Per $k = 0$

$$\mathbf{X}(z)z^{k-1} \Big|_{k=0} = \frac{10}{z(z-1)(z-2)}$$

la funzione ha quindi **3 poli semplici**, $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, mentre per $k > 0$ $\mathbf{X}(z)z^{k-1}$ ha solo i **due poli** $z = 1$, $z = 2$. Questi due casi sono quindi da considerarsi separatamente.

- **Caso $k = 0$.** Si ottiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^3 \left[\text{residuo di } \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_3 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

e quindi

$$x(0) = k_1 + k_2 + k_3 = 5 - 10 + 5 = 0$$

- **Caso $k > 0$.** Si ottiene ora

$$x(k) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = 10(2^{k-1})$$

e quindi

$$x(k) = k_1 + k_2 = -10 + 10(2^{k-1}) = 10(2^{k-1} - 1)$$

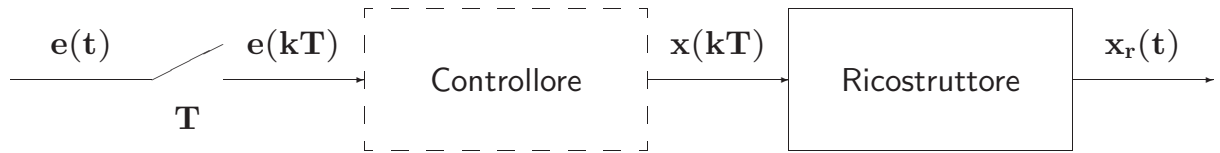
In definitiva si ottiene

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 10(2^{k-1} - 1) & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Lezione 5

Campionamento

- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una **parte continua** (il processo da controllare) e una **parte discreta** (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo **discreto** sia variabili a tempo **continuo**
- I dispositivi di interfaccia sono il **campionatore** e il **ricostruttore**

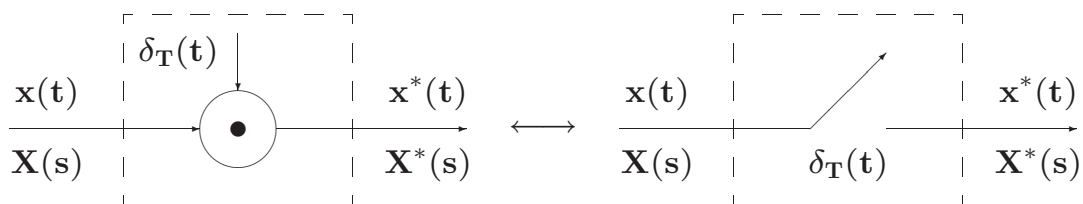
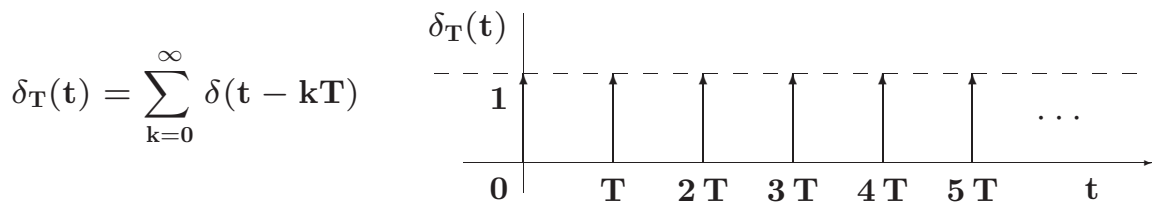


- Ricostruttore di ordine zero:

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)]$$

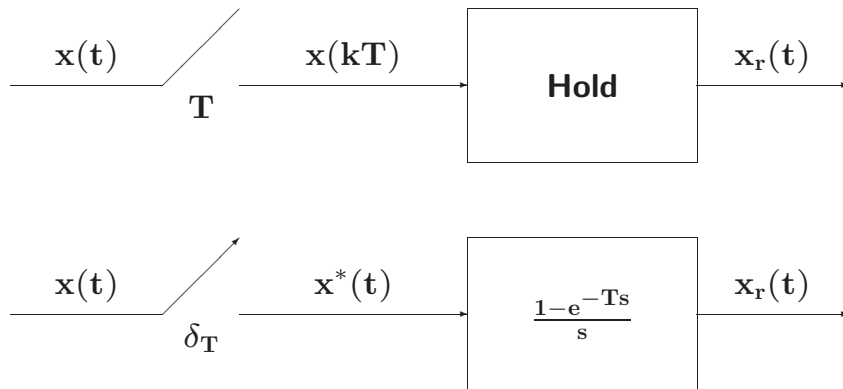
$$\begin{aligned} X_r(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} & X^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \\ x^*(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \end{aligned}$$



- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali
- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

- La trasformata zeta della sequenza $x(kT)$ anziché la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) \delta_T(t) = \mathbf{x}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_s t}$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

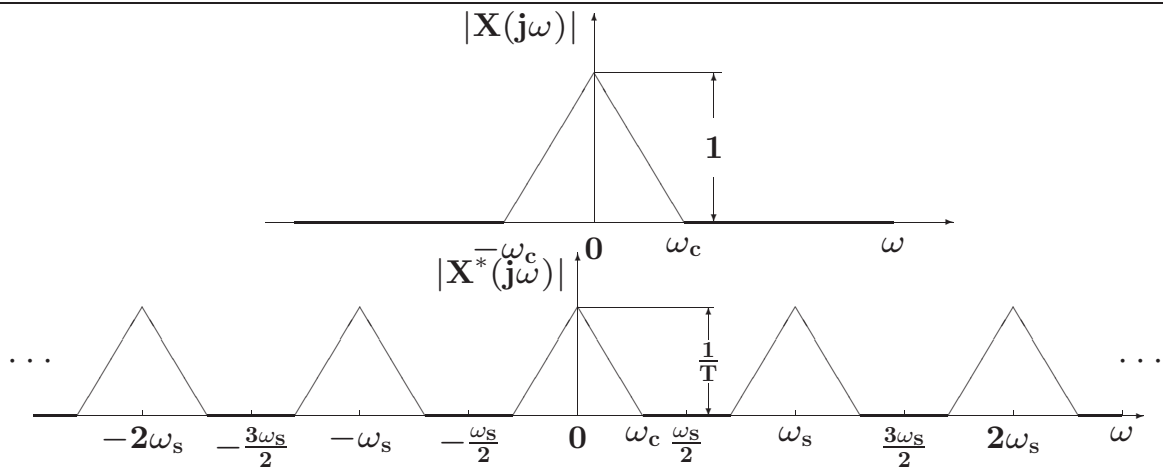
ne segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{x}(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[\mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(s - jn\omega_s)$$

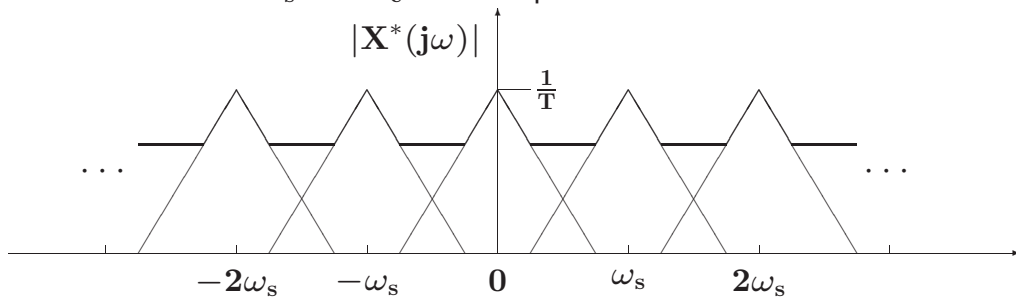
- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $\mathbf{X}^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $\mathbf{X}(s - jn\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $\mathbf{X}(s)$ mediante traslazione di $jn\omega_s$ nel campo complesso.
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$\mathbf{X}^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(j\omega - jn\omega_s)$$



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non è rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

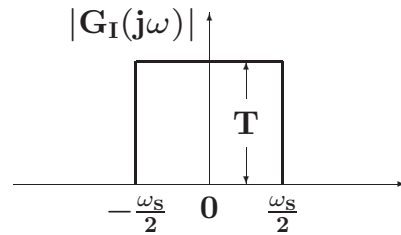
● **Teorema di Shannon**

Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c :

$$\omega_s > 2\omega_c$$

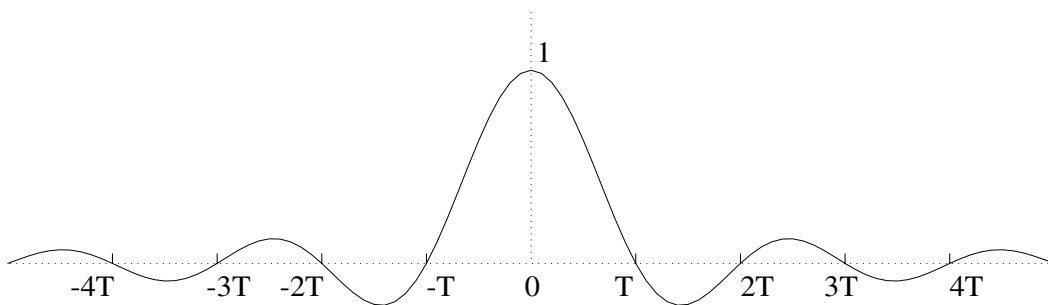
● Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



● Il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso vale:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(\tau) \mathbf{g}_I(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t-\tau)/2)}{\omega_s(t-\tau)/2} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(kT) \frac{\sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2} \end{aligned}$$

- Occorrono tutti i campioni $\mathbf{x}(kT)$ passati e futuri
- Si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili

- **Aliasing:** Con il termine **aliasing** si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.
- Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata

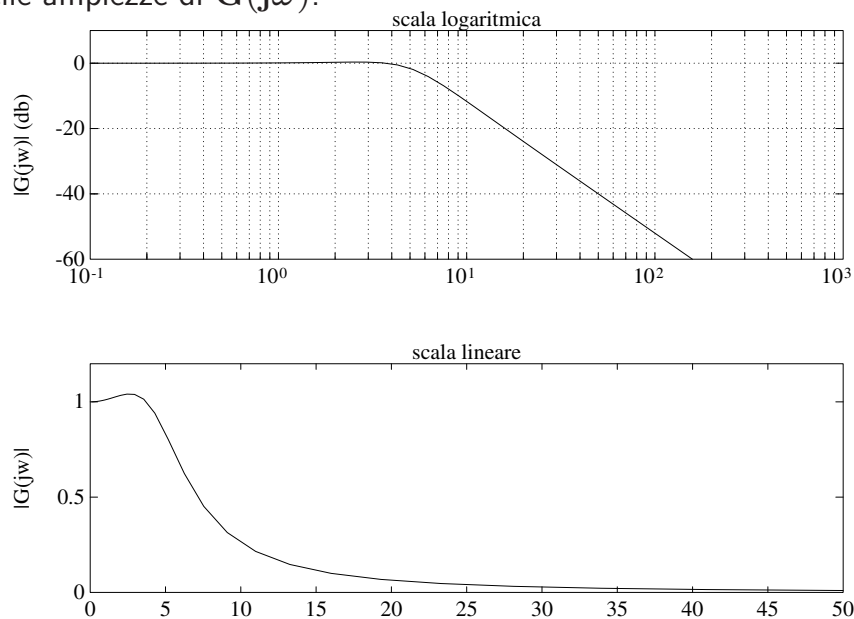
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

- Il sistema $G(s)$ ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm j4$, pulsazione naturale $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = 3/5$

$$G(s) = \frac{25}{(s + 3)^2 + 4^2}$$

- Diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$:



- Per $\omega > 10\omega_n = 50 \text{ rad/s} = \bar{\omega}$, l'ampiezza di $G(j\omega)$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico

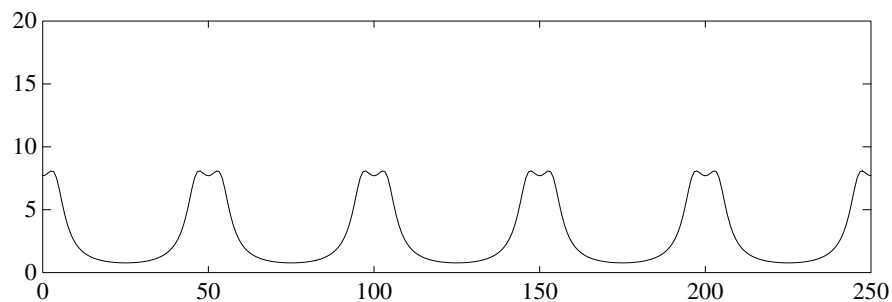
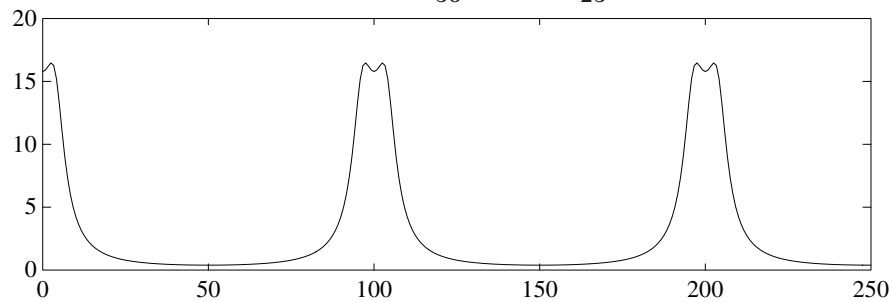
- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = 50 \text{ rad/s}$
- Applicando la \mathcal{Z} -trasformata si ha

$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T) z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T) z + e^{-6T}}$$

- La risposta spettrale è data da

$$G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Andamento spettrale di $G^*(j\omega)$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ e $T = \frac{\pi}{25}$



Lezione 6

Ricostruttori di segnale - relazione tra piano S e piano Z

- Tipici ricostruttori di segnale

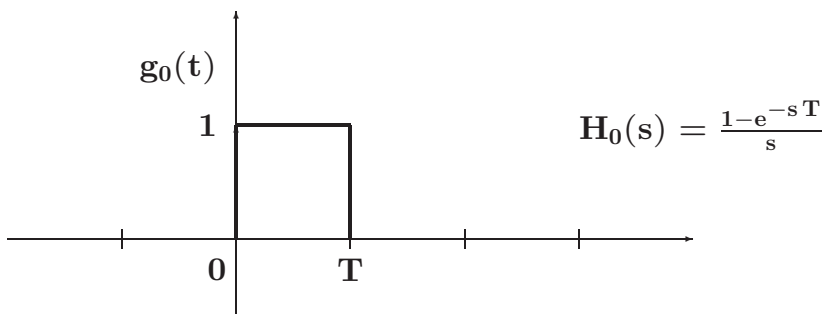


$$\begin{aligned}
 x(t) = & x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \\
 & + \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t-kT)^2}{2!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \quad \dots$$

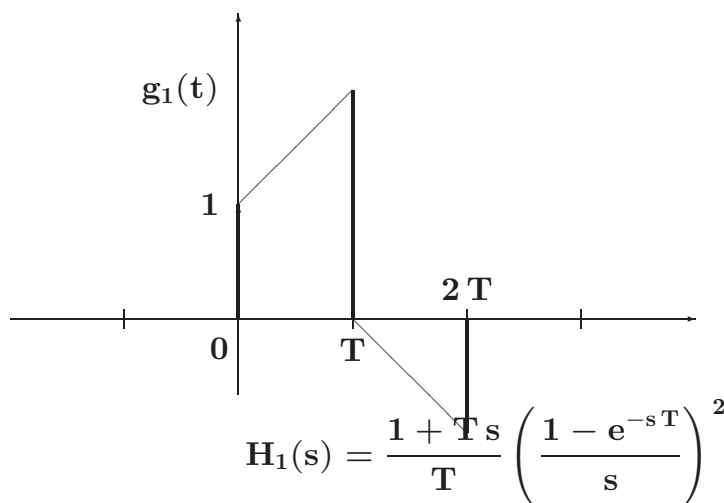
- Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



- Ricostruttore di ordine uno

$$x_1(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT)$$



- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j} \\
 &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}
 \end{aligned}$$

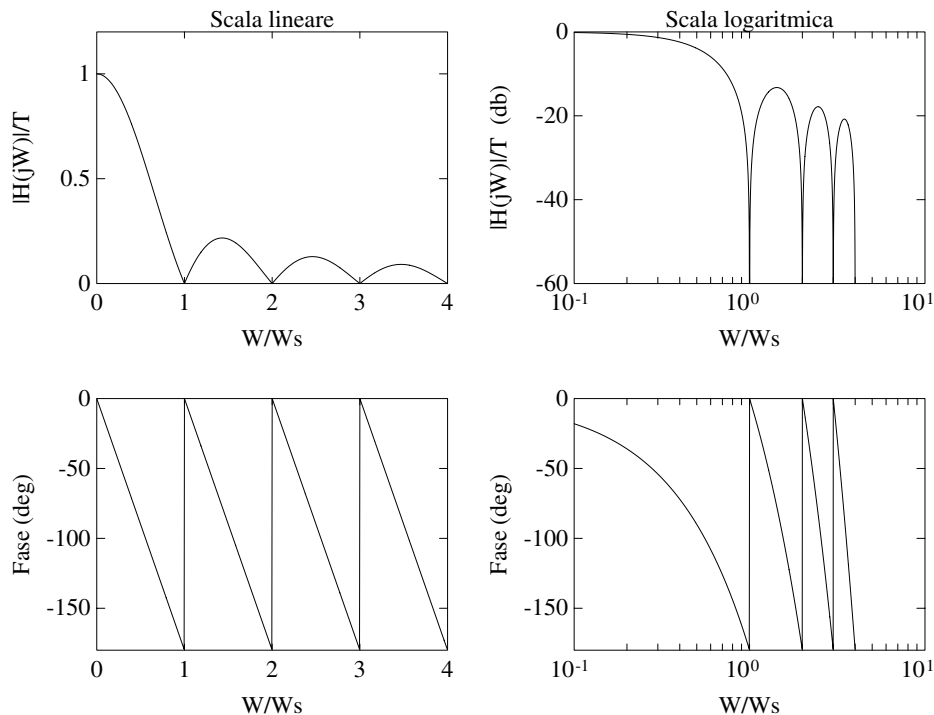
- Modulo

$$|\mathbf{H}_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

- Fase

$$\text{Arg} [\mathbf{H}_0(j\omega)] = \text{Arg} \left[\sin \frac{\omega T}{2} \right] - \frac{\omega T}{2}$$

- Ricostruttore di ordine zero



Corrispondenza tra piano s e piano z

- $\mathbf{X}^*(s) = \mathbf{X}(z)|_{z=e^{sT}}$
- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s

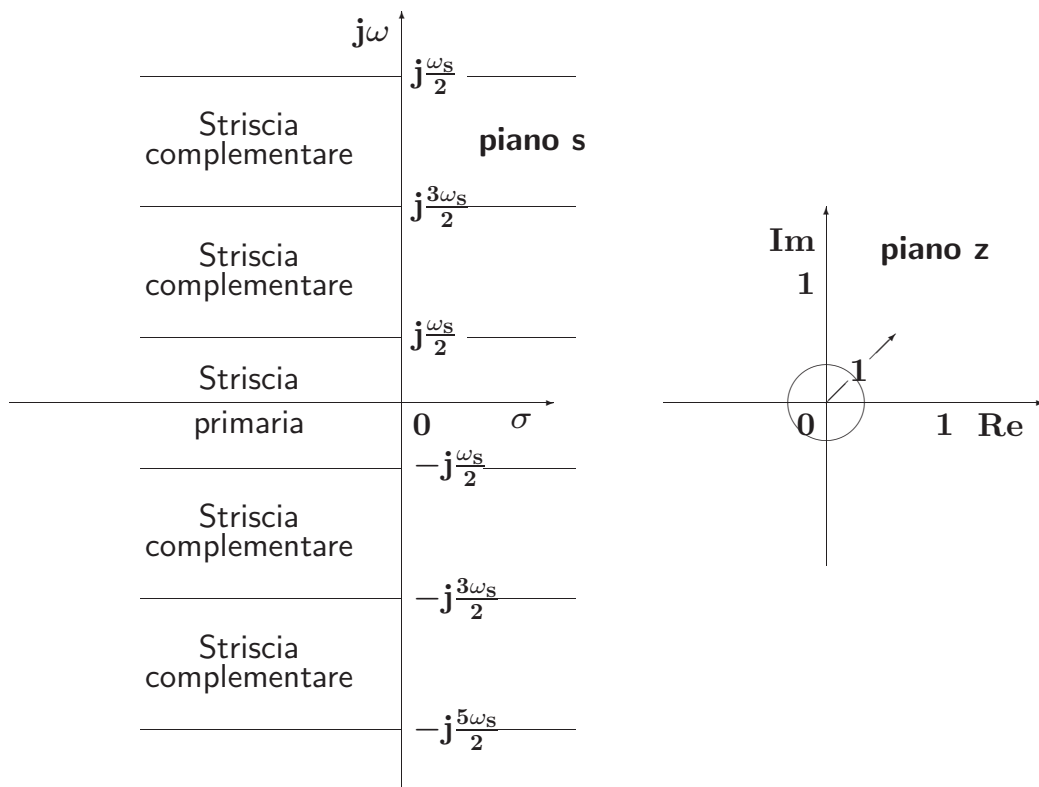
- I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario:

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$).
- La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di **striscia primaria**

Lezione 7

- Striscia primaria e Strisce complementari



- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

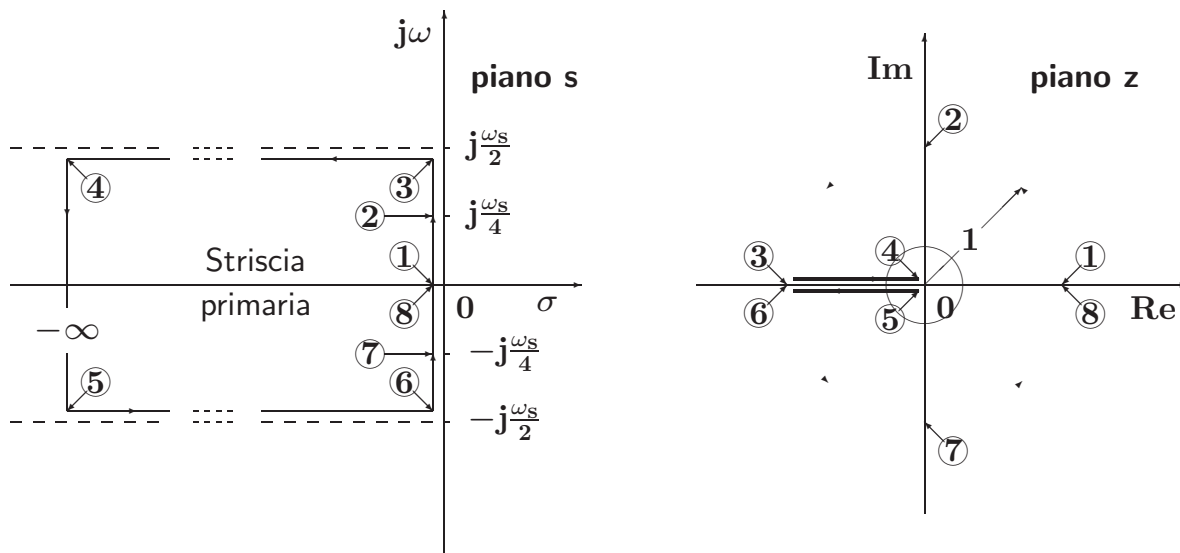
- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

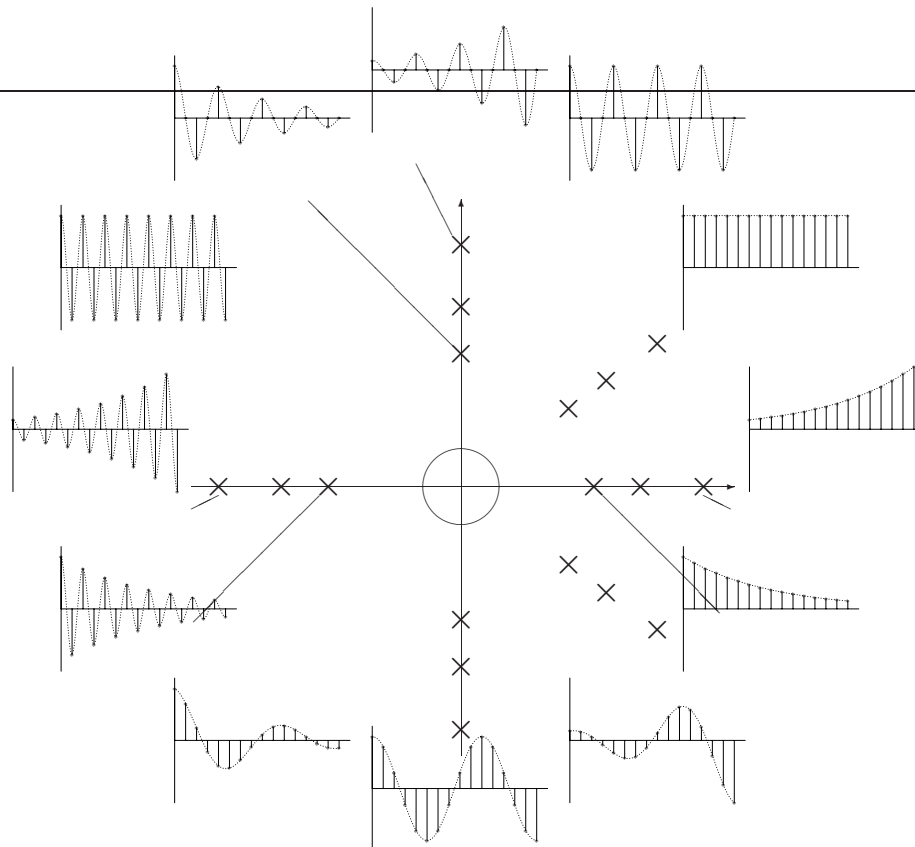
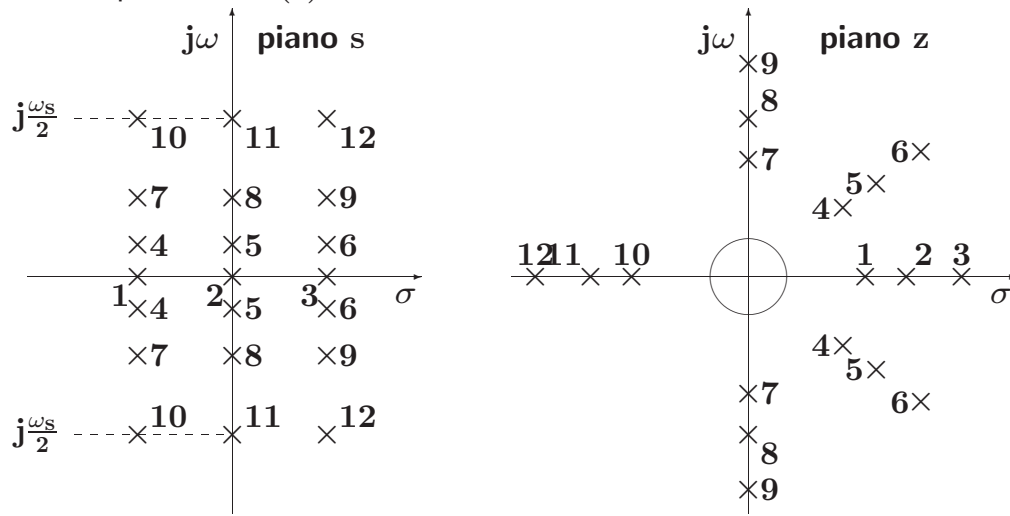
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

- Mapping tra striscia primaria e piano z

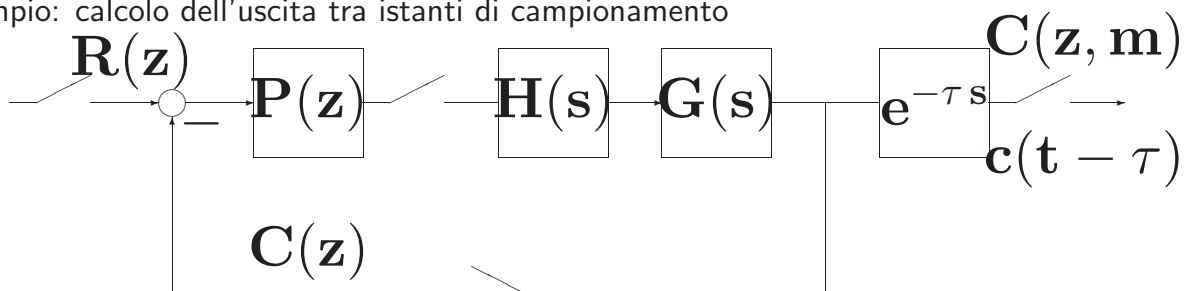


- I punti del piano s e del piano z , posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$



Lezione 10

- Esempio: calcolo dell'uscita tra istanti di campionamento



- Con $P(z) = 1.5$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$ e $T = 1$ s si ha

$$\frac{C(z, m)}{R(z)} = \frac{P(z) HG(z, m)}{1 + P(z) HG(z)}$$

$$\mathbf{HG}(z, m) = \frac{z^{-1} [(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

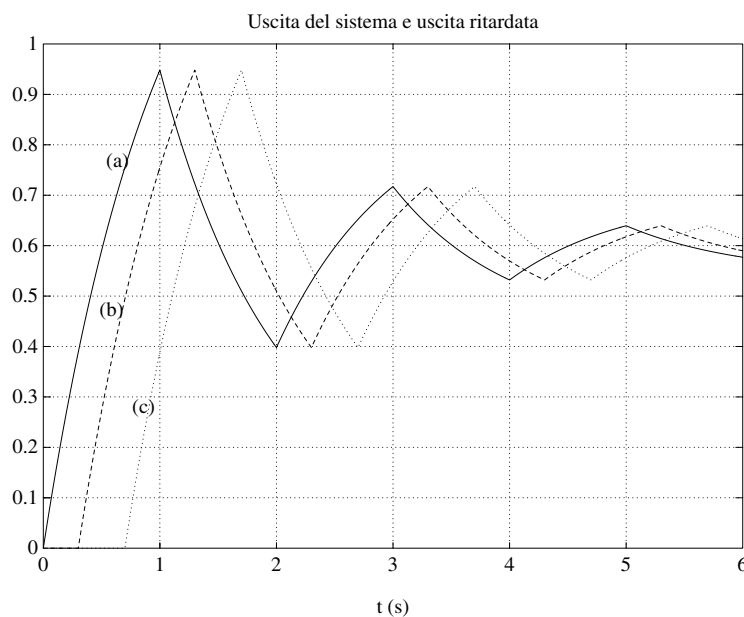
$$\mathbf{HG}(z) = \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

$$\frac{\mathbf{C}(z, m)}{\mathbf{R}(z)} = \frac{1.5 z^{-1} [(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 + 0.58z^{-1}}$$

- Nel caso in cui $\mathbf{R}(z)$ sia un gradino unitario:

$$\mathbf{C}(z, m) = \frac{1.5 z^{-1} [(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 - 0.42 z^{-1} - 0.58 z^{-2}}$$

$$\mathbf{C}(z, m) = 1.5(1 - e^{-mT})z^{-1} + 1.5(0.58 e^{-mT} + 0.052)z^{-2} - \dots$$



- Stabilità dei sistemi discreti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Stabilità semplice
- Stabilità asintotica
- Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

- Il comportamento dinamico di un sistema

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dipende dai poli di $G(z)$, cioè dalle radici del polinomio $A(z)$.

- Esempio

$$G(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

in risposta a

$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

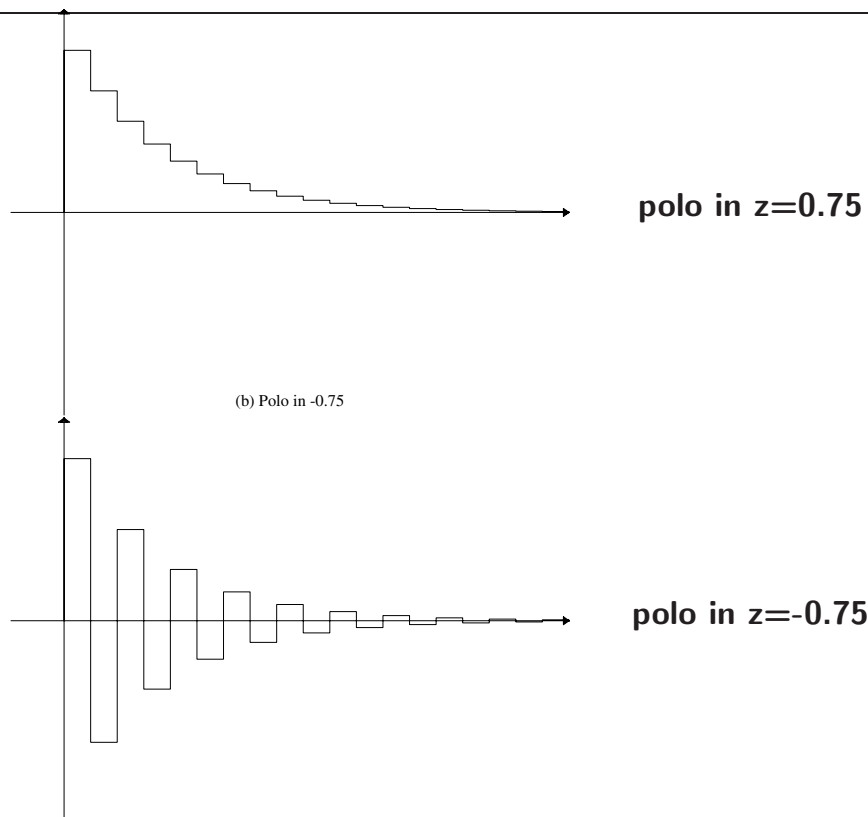
in corrispondenza ai valori $a = 0.75$, $a = -0.75$, $a = 1.25$, $a = -1.25$, $a = 1$, $a = -1$

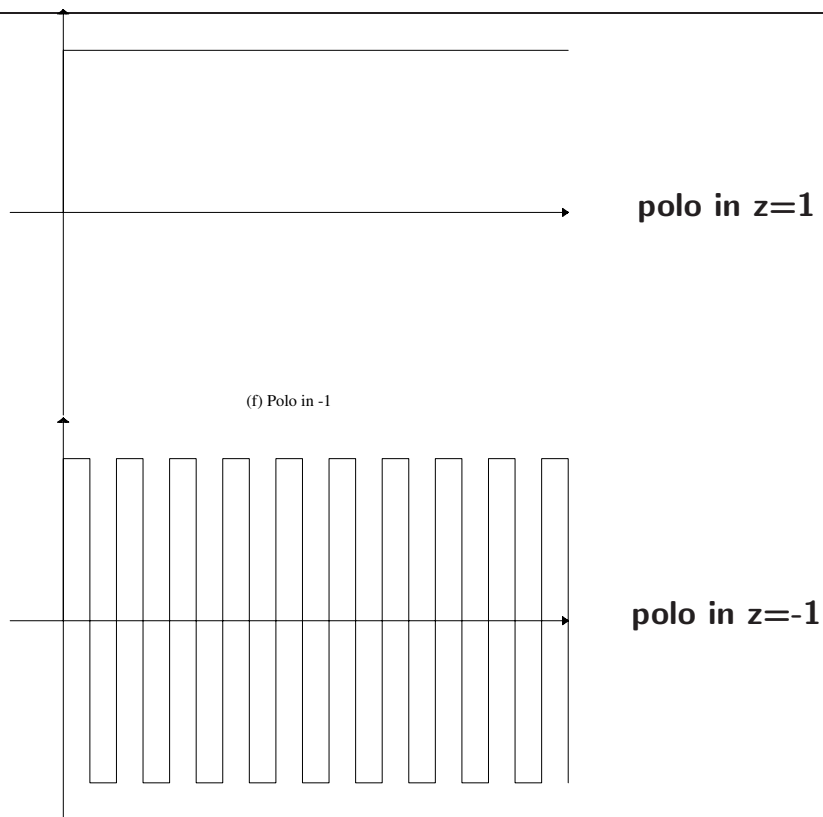
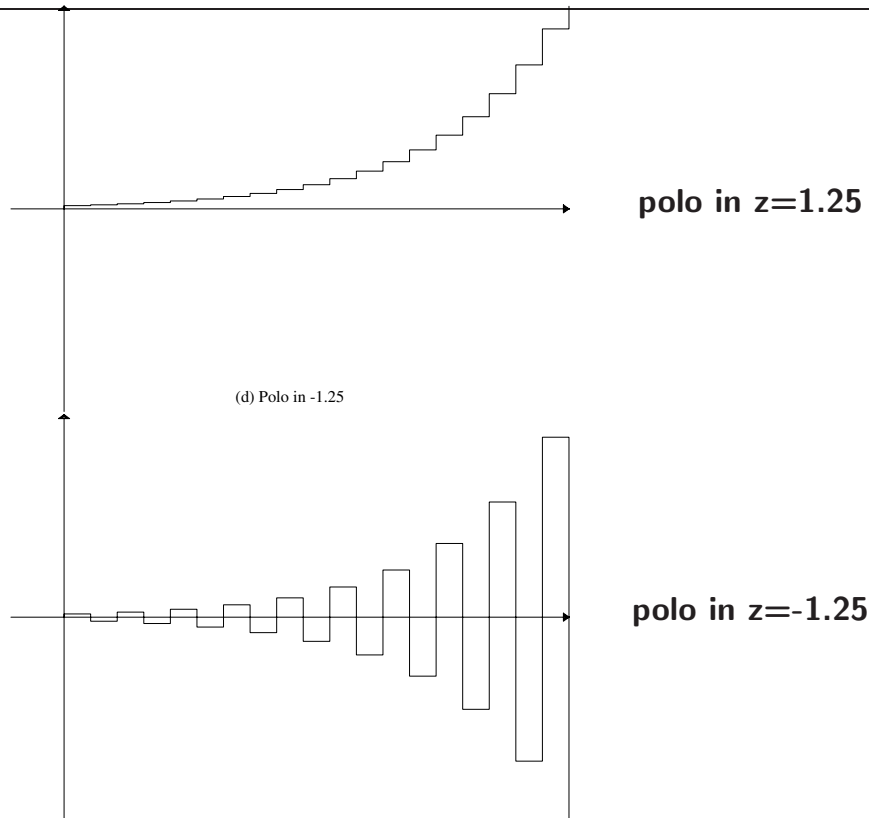
$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

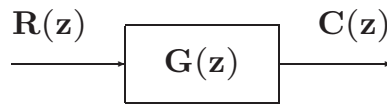
$$y(k) = -ay(k - 1) + 4u(k - 1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 4u(0) = 4 \\ y(2) &= -ay(1) + 4u(1) = -4a \\ y(3) &= -ay(2) + 4u(2) = 4a^2 \\ y(4) &= -ay(3) + 4u(3) = -4a^3 \\ y(5) &= -ay(4) + 4u(4) = 4a^4 \\ &\dots \\ y(k) &= -ay(k - 1) + 4u(k - 1) = 4(-a)^{k-1} \end{aligned}$$

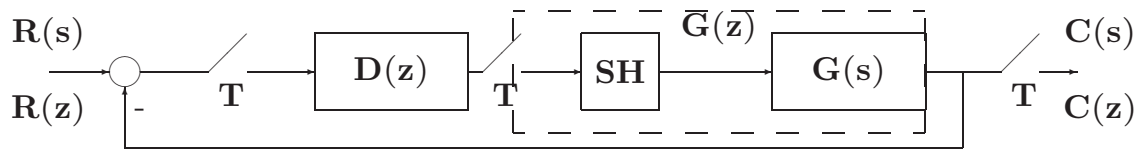
(a) Polo in 0.75







(a)



(b)

$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Sia dato un sistema descritto da

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{oppure} \quad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $A(z)$ (o del polinomio $1 + D(z)G(z)$), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano z ossia $|p_i| < 1, \forall i$.
- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario $|p_i| = 1$ sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.

- Si deve risolvere una equazione polinomiale:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

la cui soluzione è agevole solo per piccoli valori di n

- Tre metodi:
 1. utilizzare una trasformazione bilineare ed applicare il criterio di Routh-Hurwitz;
 2. utilizzare il criterio di Jury che elabora direttamente i coefficienti di $A(z)$, cioè del denominatore di $G(z)$
 3. criterio di Nyquist

- Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

- Il cerchio unitario in z corrisponde al semipiano sinistro del piano w e viceversa

$$\bullet \quad |z| = \left| \frac{1+w}{1-w} \right| = \left| \frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega} \right| < 1$$

$$\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 < (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma < 0$$

$$\bullet \quad |z| = 1$$

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 = (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0$$

- Per l'analisi della stabilità di una funzione $G(z)$ ($G_0(z)$) si procede come segue:

1. si considera l'equazione caratteristica

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

2. si effettua la trasformazione

$$\left(\frac{1+w}{1-w} \right)^n + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{1+w}{1-w} + a_n = 0$$

da cui si ottiene

$$Q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \dots + q_{n-1} w + q_n = 0$$

3. applicando il criterio di Routh-Hurwitz, si studiano quindi i segni delle radici di $Q(w)$

- Esempio:

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^3 + 2z^2 + z + 1}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 = 0$$

$$-w^3 + 3w^2 + w + 5 = 0$$

3	-1	1
2	3	5
1	8/3	
0	5	

- Il sistema ha un polo instabile

- Criterio di Jury

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n$$

con $a_0 > 0$. La tabella di Jury è la seguente:

	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	\dots	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	\dots	c_1	c_0		
6	c_0	c_1	\dots	c_{n-2}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
$2n - 5$	p_3	p_2	p_1	p_0		
$2n - 4$	p_0	p_1	p_2	p_3		
$2n - 3$	q_2	q_1	q_0			

- Gli elementi delle righe dispari da 3 a $(2n - 3)$ sono i seguenti determinanti

$$\begin{aligned}
 b_k &= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\
 c_k &= \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\
 &\vdots \\
 q_k &= \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2
 \end{aligned}$$

- Gli elementi delle righe pari sono semplicemente gli elementi delle righe dispari in ordine opposto

- Affinchè il sistema sia stabile:

1. $|a_n| < a_0$;
2. $P(z)|_{z=1} > 0$;
3. $P(z)|_{z=-1} = \begin{cases} > 0 & n \text{ pari} \\ < 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$
4. $|b_{n-1}| > |b_0|$,
 $|c_{n-2}| > |c_0|$,
 \vdots
 $|q_2| > |q_0|$

- Esempio:

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$$

1. $|1| < 1$, non verificata;
 2. $P(1) = 5$, verificata;
 3. $P(-1) = 1 \neq 0$, non verificata.
- Il sistema risulta instabile

- Esempio:

$$P(z) = z^4 + 1.4z^3 + 0.71z^2 + 0.154z + 0.012$$

In questo caso i coefficienti sono $a_0 = 1$, $a_1 = 1.4$, $a_2 = 0.71$, $a_3 = 1.154$, $a_4 = 0.012$, e le condizioni per il test di Jury divengono

1. $0.012 < 1$;
2. $P(1) = 3.276 > 0$;
3. $P(-1) = 0.1680 > 0$ ($n = 4$ pari);

4. la tabella di Jury è la seguente:

1	0.012	0.154	0.710	1.400	1.000
2	1.000	1.400	0.710	0.154	0.012
3	-1.000	-1.398	-0.701	-0.137	
4	-0.137	-0.701	-1.398	-1.000	
5	0.981	1.302	0.510		

e quindi

$$1 > 0.137$$

$$0.981 > 0.51$$

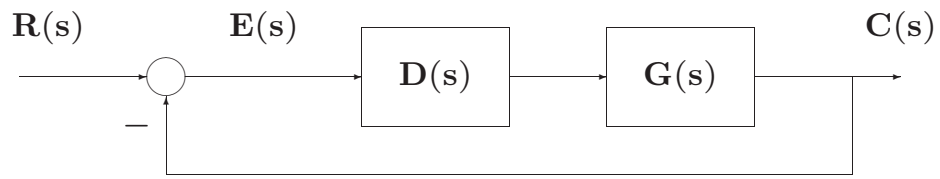
- Tutte le condizioni sono rispettate e quindi si può concludere che il sistema è stabile

Lezione 12

- Specifiche di progetto di sistemi di controllo
- Specifiche che il sistema deve soddisfare, in condizioni **statiche** (o **di regime**) e durante i **transitori**:
 - **Precisione a regime**: ci si riferisce con questa alla capacità di un sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore
 - **Risposta nel transitorio**: ci si riferisce all'andamento per tempi finiti dell'uscita del sistema in retroazione in risposta a segnali tipici in ingresso

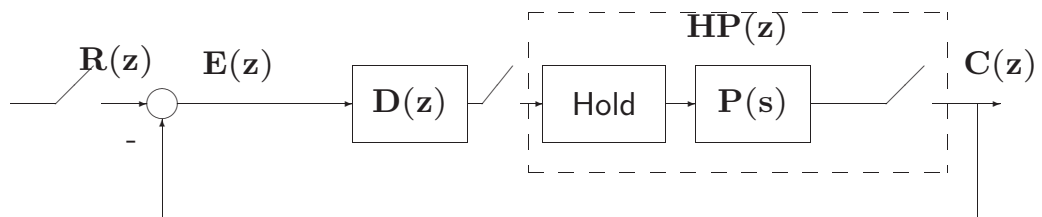
- **Stabilità relativa**: ci si riferisce ai margini di stabilità
- **Sensitività parametrica**: ci si riferisce al fatto che le prestazioni del sistema non vengano alterate dalle variazioni di certi parametri
- **Reiezione di disturbi**: cioè la capacità del sistema controllato di ridurre al minimo l'influenza sull'uscita di eventuali disturbi che entrano nell'anello di controllo
- **Sforzo di controllo**: ci si riferisce all'ampiezza massima della variabile manipolabile $v(t)$, o sull'energia entrante nel sistema

- Errori a regime (caso continuo)



$$G(s) = \frac{K(1 + q_1s)(1 + q_2s) \dots (1 + q_ms)}{s^N(1 + p_1s)(1 + p_2s) \dots (1 + p_ps)}$$

- Errori a regime (caso discreto)
- Nel caso discreto la corrispondente definizione di tipo si riferisce al numero di poli nel punto $z = 1$



$$G(z) = D(z)HP(z) = D(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)}R(z)$$

- Assumendo che il sistema sia stabile, l'errore a regime può essere calcolato mediante il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned}
 e_{\text{reg}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})\mathbf{E}(z)] \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \mathbf{R}(z) \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \mathbf{R}(z) \right]
 \end{aligned}$$

- Errore di posizione

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(z) &= \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \\
 e_p &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{r_0}{1 + \mathbf{G}(z)} \right]
 \end{aligned}$$

- Definendo $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} \mathbf{G}(z)$ **costante di posizione**

$$e_p = \frac{r_0}{1 + k_p}$$

- **Errore di velocità**

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z) &= \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2} \\ \mathbf{e}_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+\mathbf{G}(z)} \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{\mathbf{T}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})\mathbf{G}(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo $\mathbf{k}_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})\mathbf{G}(z)}{\mathbf{T}}$ **costante di velocità**

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{r}_0}{\mathbf{k}_v}$$

- **Errore di accelerazione**

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z) &= \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1}(1+z^{-1})\mathbf{r}_0}{2(1-z^{-1})^3} \\ \mathbf{e}_a &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+\mathbf{G}(z)} \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1}(1+z^{-1})\mathbf{r}_0}{2(1-z^{-1})^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{\mathbf{T}^2 \mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2 \mathbf{G}(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo $\mathbf{k}_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 \mathbf{G}(z)}{\mathbf{T}^2}$ **costante di accelerazione**

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{r}_0}{\mathbf{k}_a}$$

- Esempio

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

con $T = 0.25$ s

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 2$$

$$e_p = \frac{1}{1+2} = 0.333$$

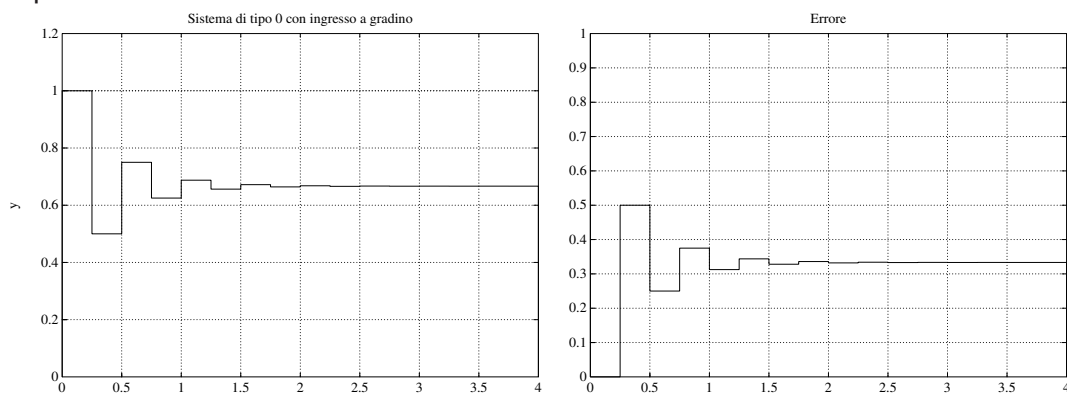
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = 0$$

$$e_v = \frac{1}{0} = \infty$$

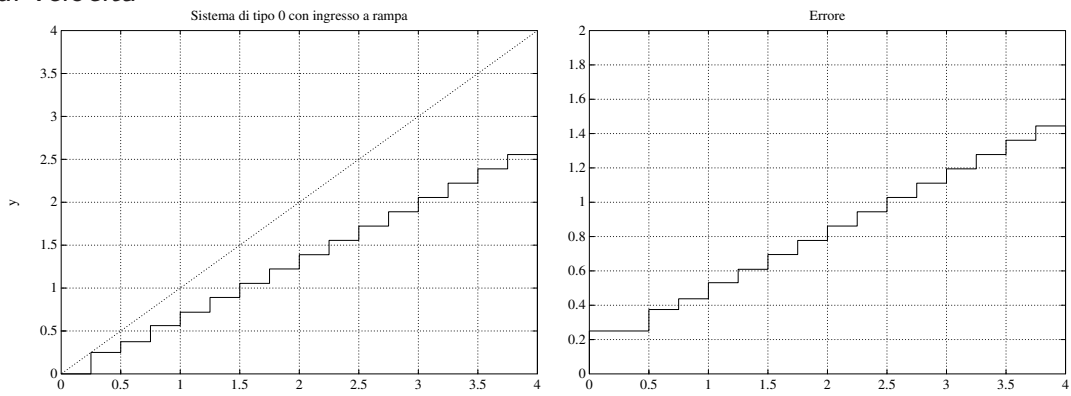
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0$$

$$e_a = \frac{1}{0} = \infty$$

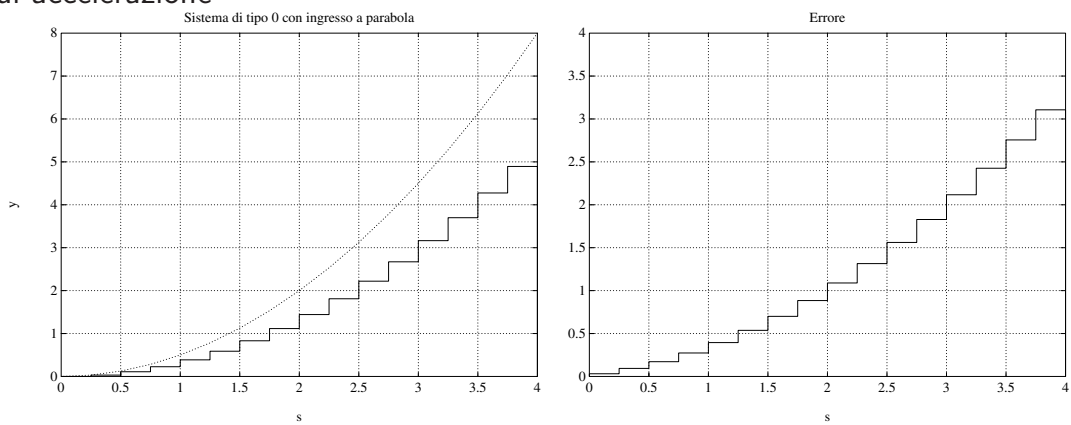
- Errore di posizione



● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



• Esempio

$$G(z) = \frac{0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{0.3z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

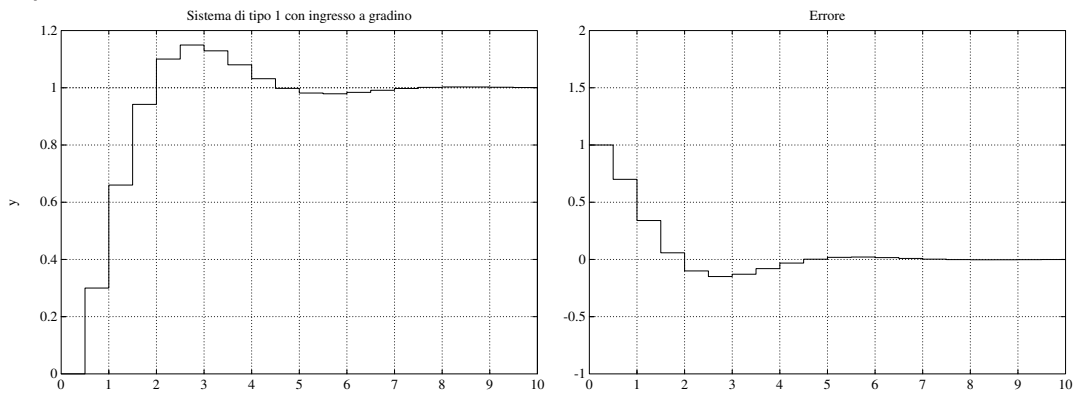
con $T = 1$ s. Il sistema è ora di tipo 1

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \qquad e_p = 0$$

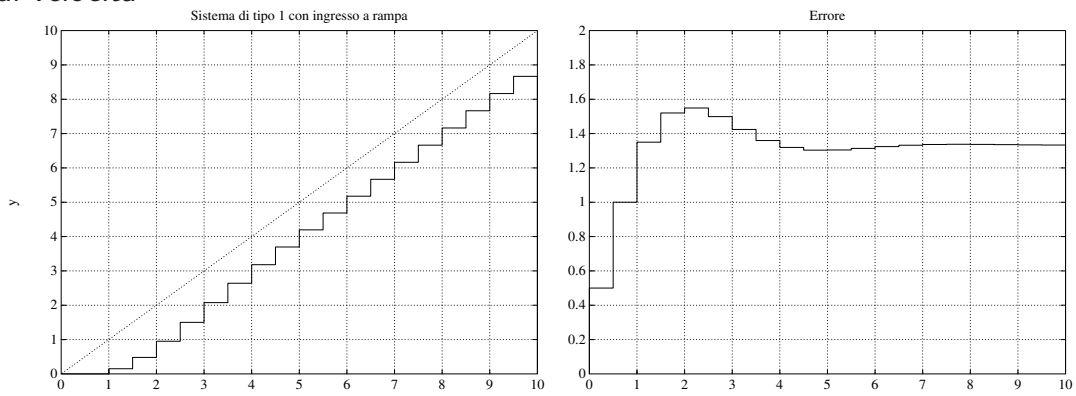
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = 0.75 \qquad e_v = 1.333$$

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0 \qquad e_a = \infty$$

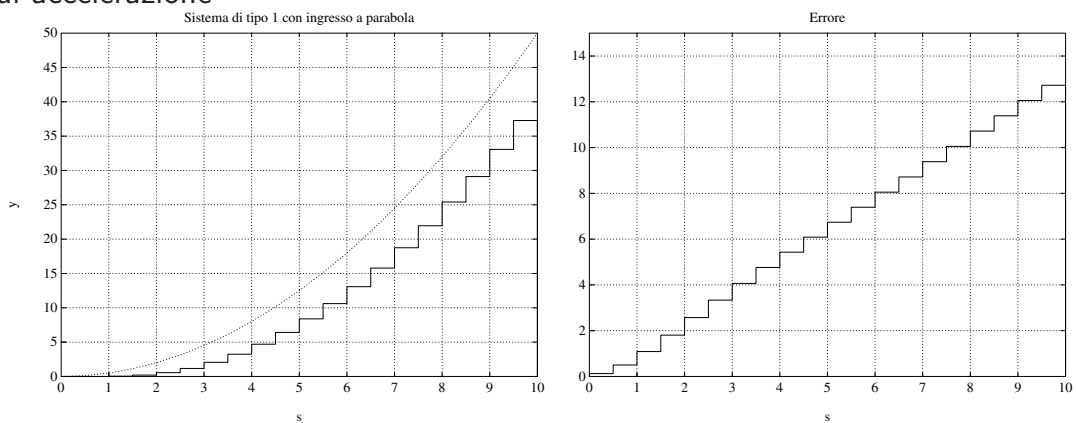
• Errore di posizione



● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



● Esempio

$$G(z) = \frac{0.3(1 - 1.2z^{-1} + 0.37z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6z^{-1})}$$

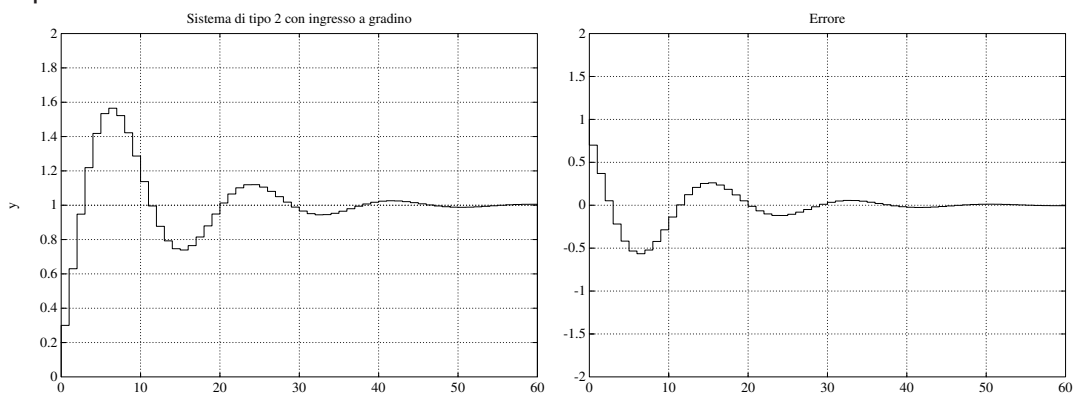
con $T = 1$ s. Il sistema è di tipo 2

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \qquad e_p = 0$$

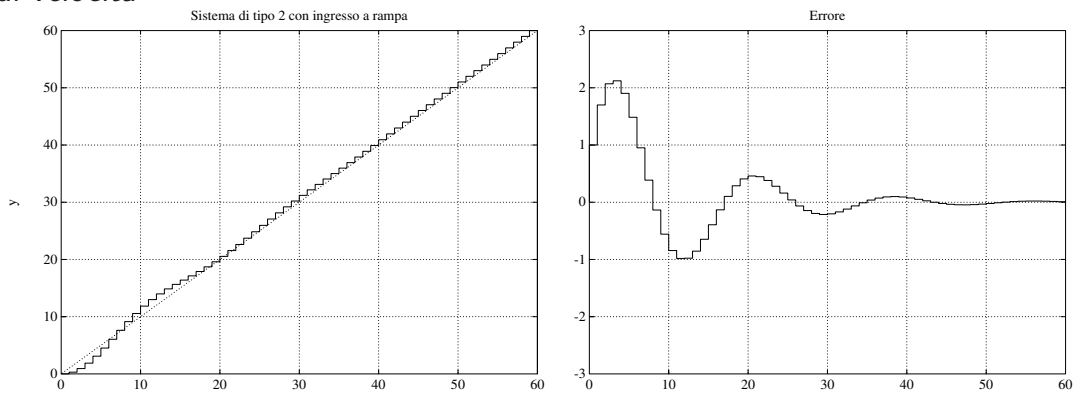
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = \infty \qquad e_v = 0$$

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0.1275 \qquad e_a = 7.843$$

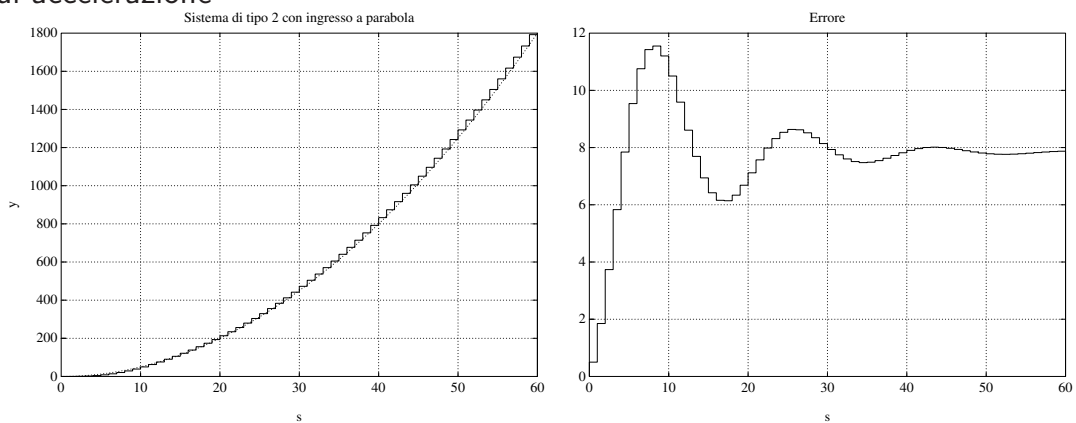
● Errore di posizione



● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



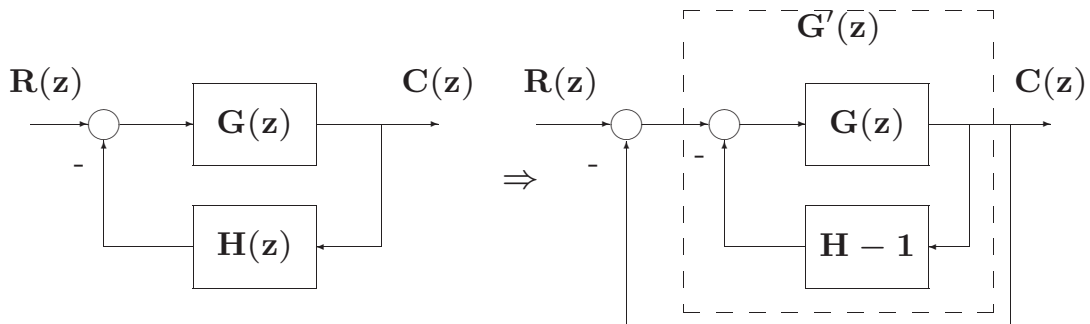
• Errori a regime in funzione del tipo di sistema

Tipo di sistema	Errore a regime in risposta a:		
	gradino	rampa	parabola
Tipo 0	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{k_a}$

- Caso di sistema in retroazione non unitaria
- Si è ancora interessati alla differenza $E(z) = R(z) - C(z)$
- Si applicano le stesse formule con

$$G'(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z) [H(z) - 1]}$$

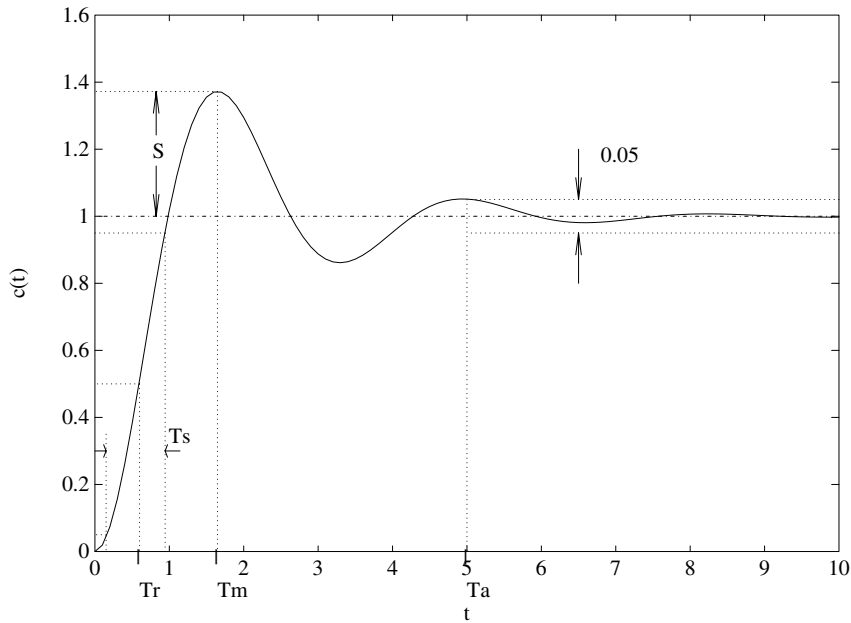
anzichè $G(z)$. Infatti



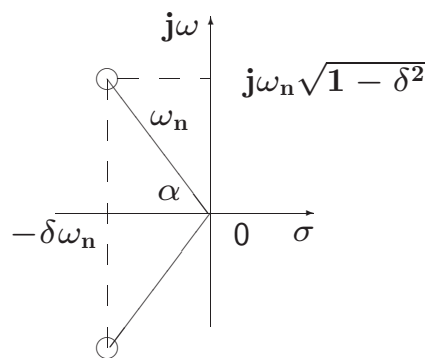
Lezione 13

- Specifiche sul transitorio
- Nel caso tempo-continuo, si definiscono le seguenti caratteristiche temporali della risposta a gradino:
 - **Tempo di salita T_s**
 - **Tempo di assestamento T_a**
 - **Tempo di ritardo T_r**
 - **Massimo sorpasso o massima sovraelongazione S**
 - **Istante di massima sovraelongazione T_m**

● Risposta di un sistema di secondo ordine



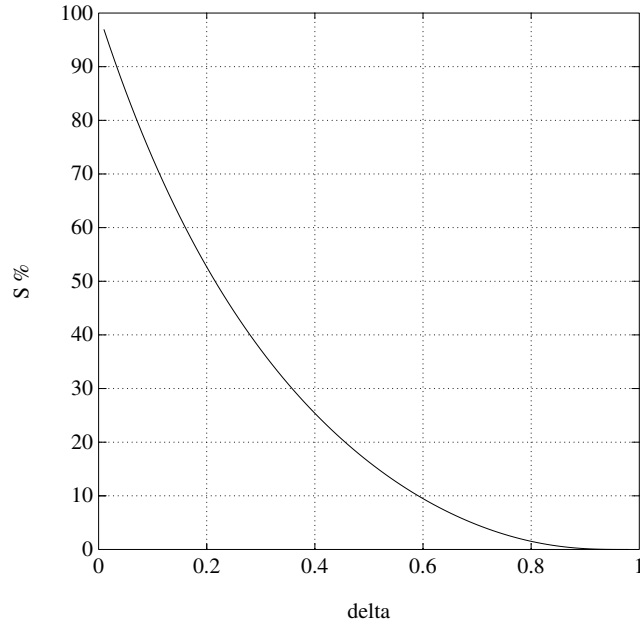
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



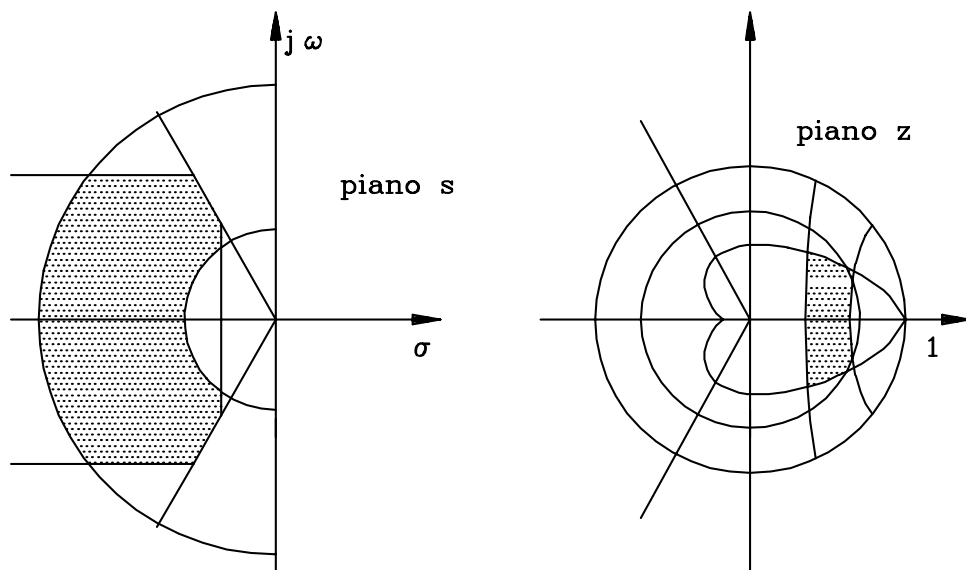
- Tempo da 0 al 100% del V.F.: $T_1 = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Istante di massimo sorpasso: $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Tempo di assestamento: $T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$ (al 5%), $T_a = \frac{4}{\delta \omega_n}$ (al 2%)

- Massimo sorpasso percentuale:

$$S = 100[c(T_m) - 1] = 100 e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$



- Posizione dei poli



- Specifiche frequenziali
- **Margine di fase** M_F : detto $-\phi$ l'argomento di $G(e^{j\omega T})$ in corrispondenza della pulsazione ω_0 per la quale $|G(e^{j\omega_0 T})| = 1$, il margine di fase M_F è il complemento a π di ϕ , cioè

$$M_F = \pi - \phi$$

Tipici valori di specifica sono $45^\circ \div 60^\circ$

- **Margine di ampiezza** M_A : è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione ω' a cui corrisponde la fase π :

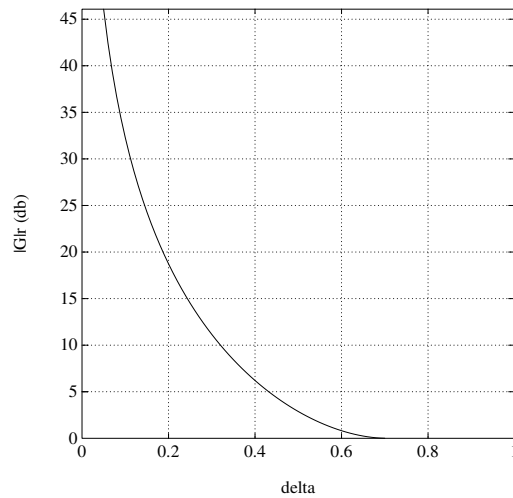
$$M_A = \frac{1}{|G(e^{j\omega' T})|}$$

dove $\arg\{G(e^{j\omega' T})\} = \pi$

Valori usuali di specifica per questo parametro sono 4-6 (12-16 db)

- **Picco di risonanza** $|G_r|$: massimo valore che assume il modulo di $|G(e^{j\omega T})|$ al variare di ω , è funzione del coefficiente di smorzamento. Espresso solitamente in decibel ha valori tipici di 2-3 db;

$$|G|_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$



- **Pulsazione di risonanza** ω_r : pulsazione alla quale si verifica il picco di risonanza:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

- **Banda passante** ω_b : pulsazione alla quale il modulo della funzione di risposta armonica si riduce di 3 db rispetto al valore del modulo per $\omega = 0$.
- Si ricorre spesso all'utilizzo del piano ausiliario w che gode della stessa proprietà del piano s di trattare con funzioni razionali fratte in ω . È dunque su questo piano w che si utilizzano in pratica le suddette specifiche per il progetto di semplici regolatori digitali (reti correttrici)

- Sensitività parametrica

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

- Sensitività ad un parametro a

$$\Sigma_a^{G_0} \approx \frac{\Delta G_0 / G_0}{\Delta a / a} = \frac{\Delta G_0}{\Delta a} \frac{a}{G_0}$$

- Facendo il limite per $\Delta a \rightarrow 0$

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{\delta G_0}{\delta a} \frac{a}{G_0}$$

- Sensitività di G_0 rispetto a G

$$\Sigma_G^{G_0} = \frac{\delta G_0}{\delta G} \frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + G(z)}$$

e, valutandola ad una data pulsazione ω

$$\Sigma_G^{G_0} = \frac{1}{1 + G(e^{j\omega T})}$$

- Volendo che la sensitività sia piccola a date frequenze, è quindi necessario che per tali frequenze $G(e^{j\omega T})$ sia grande. Un modo per ottenere questo risultato è quello di aumentare il guadagno d'anello, il che però comporta in genere riduzioni dei margini di stabilità

- Se la $G(z)$ dipende da un parametro a

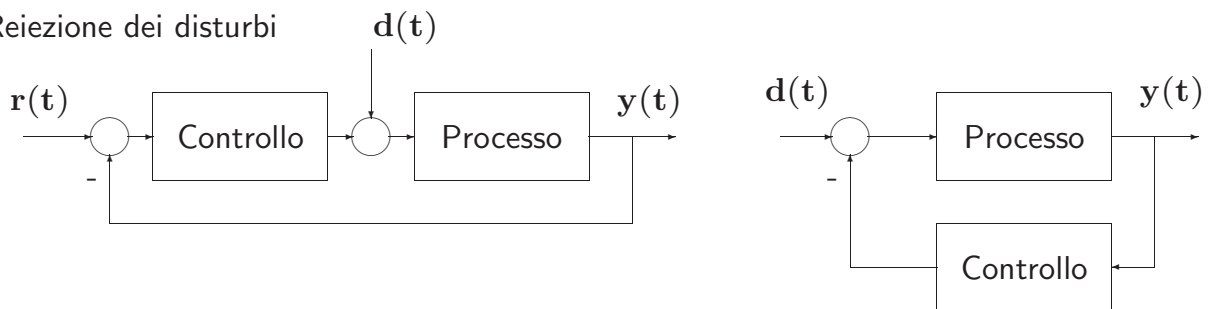
$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{\delta G_0}{\delta a} \frac{a}{G_0} = \frac{\delta G_0}{\delta G} \frac{\delta G}{\delta a} \frac{a}{G_0}$$

da cui

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{a \frac{\delta G(z)}{\delta a}}{G(z)} \frac{1}{[1 + G(z)]}$$

- Anche in questo caso, per ridurre la sensitività bisogna aumentare il guadagno d'anello

- Reiezione dei disturbi



$$\frac{Y(z)}{D(z)} = G_d(z) = \frac{HG(z)}{1 + C(z)HG(z)}$$

essendo $C(z)$ la funzione di trasferimento del controllore e $HG(z)$ quella del processo

- Se

$$|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{HG}(\mathbf{z})| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}(\mathbf{z}) \approx \frac{\mathbf{D}(\mathbf{z})}{\mathbf{C}(\mathbf{z})}$$

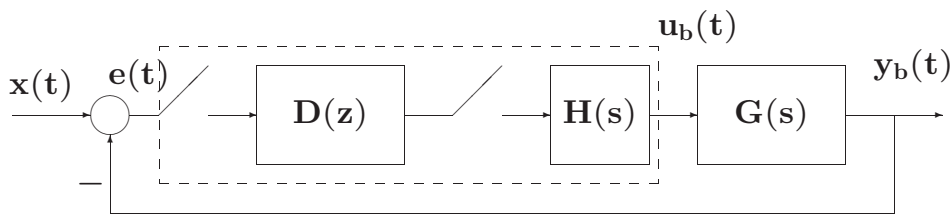
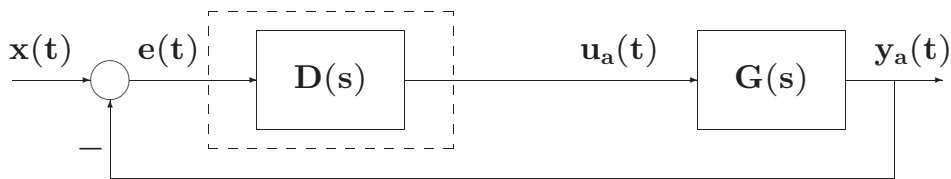
l'entità del disturbo è ridotta di un fattore $\mathbf{C}(\mathbf{z})$

- Se $\mathbf{D}(\mathbf{z})$ è costante, allora un integratore in $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ farà sì che a regime l'errore causato dal disturbo sia nullo
- Un disturbo ad una frequenza f_d verrà attenuato se per quella frequenza $|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{HG}(\mathbf{z})| \gg 1$ oppure $|\mathbf{HG}(\mathbf{z})| \ll 1$ e $|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{HG}(\mathbf{z})| \leq 1$

Lezione 14

Progetto del controllore discreto

- Metodo indiretto



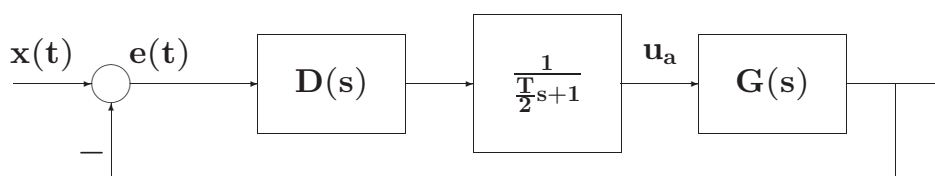
- **T** il più piccolo possibile !?

- Tre passi concettuali

1. Definizione di \mathbf{T} e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$\mathbf{H}_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

$$\mathbf{H}_0(s) \approx e^{-sT/2}$$



2. Discretizzazione della $\mathbf{D}(s)$

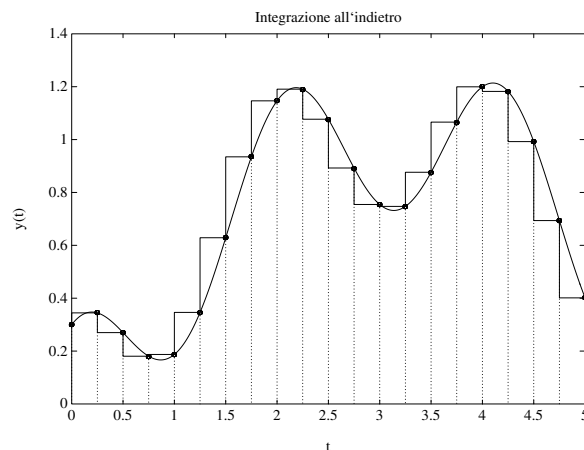
3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico

- **Tecniche di discretizzazione:**

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata
6. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

Metodo delle differenze all'indietro

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$



Metodo delle differenze in avanti

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Trasformazione bilineare

- $D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$
- detta anche **integrazione trapezoidale** (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

- **Metodo della \mathcal{Z} -trasformata**

$$\mathbf{D}(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{D}(s)] \right]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D}(s)$ stabili a $\mathbf{D}(z)$ stabili

Lezione 15

- **Metodo della \mathcal{Z} -trasformata con ricostruttore di ordine 0** o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\mathbf{D}(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\mathbf{D}(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT}$$

$$\mathbf{D}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{\mathbf{D}(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \mathbf{D}(s) \right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D}(s)$ stabili a $\mathbf{D}(z)$ stabili

- **Metodo della corrispondenza poli/zeri**
- Si fattorizza numeratore e denominatore di $\mathbf{D}(s)$
- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s + \mathbf{a}) \rightarrow (1 - e^{-\mathbf{a}T} z^{-1})$$

$$(s + \mathbf{a} \pm j\mathbf{b}) \rightarrow (1 - 2e^{-\mathbf{a}T} \cos \mathbf{b}T z^{-1} + e^{-2\mathbf{a}T} z^{-2})$$

- Si introducono zeri in $z = -1$ in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ($z = 1$) o alle alte ($z = -1$) frequenze

- Esempio

$$D(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

$$D(z) = k \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

$$D(z = 1) = k \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} = D(s = 0) = \frac{b}{a}$$

$$k = \frac{b(1 - e^{-aT})}{a(1 - e^{-bT})}$$