

## Capitolo 2

# Aerostato ad aria calda

### 2.1 Modellazione matematica

Si consideri l'aerostato ad aria calda (comunemente detto “mongolfiera”) mostrato in Figura 2.1. Come noto, questo tipo di velivoli può essere manovrato variando l'altitudine, agendo sulla potenza erogata dal riscaldatore all'interno della struttura gonfiabile, in modo da cercare e sfruttare correnti d'aria orientate nelle direzioni di interesse per la navigazione.

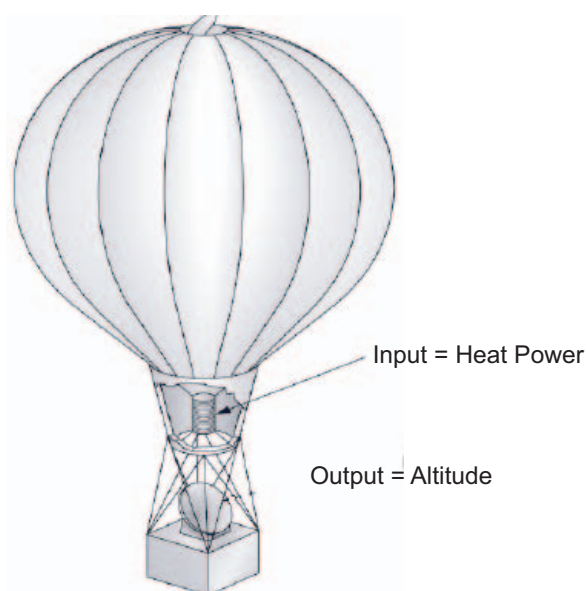


Figura 2.1: Aerostato ad aria calda (mongolfiera)

Considerando unicamente le variazioni di altitudine (dinamica verticale), il modello matematico del sistema può essere ricavato considerando che esso è costituito da una parte termica, che determina il riscaldamento dell'aria contenuta nella mongolfiera, ed una parte meccanica, nella quale la spinta di galleggiamento determina le variazioni di quota.

Il sottosistema termico è descrivibile per analogia con i circuiti elettrici di tipo resistenza-condensatore, associando le differenze di temperatura ad una tensione e il flusso di calore trasmesso per conduzione ad una corrente elettrica. Con queste analogie, l'aria contenuta all'interno dell'aerostato si comporta come un condensatore, caratterizzato da una capacità termica proporzionale al volume, alla densità dell'aria ed al suo calore specifico, mentre la conduzione di calore tra l'aria interna al pallone e quella esterna è caratterizzata da una certa resistenza termica. La parte termica del modello è pertanto riconducibile al circuito di Figura 2.2:

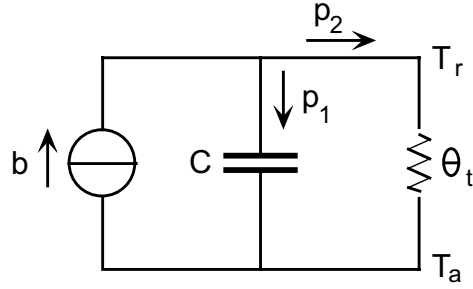


Figura 2.2: Circuito elettrico equivalente alla dinamica termica dell'aerostato

nel quale  $b$  indica la potenza in ingresso, erogata dal bruciatore,  $p_1$  la potenza accumulata dall'aerostato,  $p_2$  la potenza condotta verso l'aria esterna,  $T_r$  e  $T_a$  rispettivamente la temperatura interna alla mongolfiera e quella esterna, mentre  $\theta_t$  e  $C$  sono la resistenza termica offerta dalla superficie del pallone e la capacità termica di quest'ultimo.

Le equazioni che caratterizzano il circuito sono:

$$\begin{aligned} b &= p_1 + p_2 \\ \frac{d(T_r - T_a)}{dt} &= \frac{p_1}{C} \\ T_r - T_a &= \theta_t p_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definendo  $V$  il volume totale del pallone,  $\rho_a$  la densità dell'aria alla temperatura  $T_a$ ,  $c_a$  il calore specifico dell'aria e supponendo che tutte queste grandezze siano costanti, si possono esprimere, sulla base di note formule valide per gas ideali, le equazioni che determinano la capacità termica e la densità dell'aria riscaldata:

$$C = V \rho_a c_a$$

$$\rho_r T_r = \rho_a T_a$$

Infine, ricordando che la spinta di galleggiamento del pallone è determinata dalla differenza di densità tra l'aria riscaldata e quella esterna (per il principio di Archimede):

$$F_{spinta} = V(\rho_a - \rho_r)g$$

nella quale  $g$  è la nota costante di accelerazione gravitazionale, è possibile definire l'equazione caratteristica della dinamica verticale dell'aerostato tramite il bilancio delle forze (indicando con  $f$  il coefficiente di attrito viscoso che caratterizza la resistenza aerodinamica):

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} + f \frac{dh}{dt} + mg = F_{spinta} \quad (2.2)$$

Imponendo le seguenti scelte sulle variabili di stato, ingresso ed uscita:  $x_1 = T_r$ ,  $x_2 = h$ ,  $x_3 = \dot{h}$ ,  $y = x_2$  e  $u = b$ , si ottiene il seguente modello nonlineare nello spazio degli stati, affine nel controllo e SISO:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{C \theta_t} (T_a - x_1) + \frac{1}{C} u \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{V \rho_a g}{m} \left( 1 - \frac{T_a}{x_1} \right) - \frac{f}{m} x_3 - g \end{aligned} \quad (2.3)$$

del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [T_r \quad h \quad \dot{h}]^T$  e

$$\mathbf{f} = \left[ \frac{1}{C\theta_t}(T_a - x_1) \quad x_3 \quad \frac{V\rho_a g}{m} \left(1 - \frac{T_a}{x_1}\right) - \frac{f}{m}x_3 - g \right]^T$$

$$\mathbf{b} = \left[ \frac{1}{C} \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$h = x_2$$

## 2.2 Analisi dell'equilibrio

Si può facilmente verificare che gli stati di equilibrio del sistema non dipendono dalla particolare quota alla quale si vuole far volare l'aerostato. Imponendo che questa quota sia costante ( $x_3 = 0$ , condizione necessaria per l'equilibrio) si determina univocamente la temperatura  $T_r$  necessaria per mantenere la mongolfiera immobile e, di conseguenza, il calore che il bruciatore deve erogare per bilanciare esattamente la dispersione termica verso l'aria circostante. Formalmente, la famiglia di punti che soddisfa la condizione di equilibrio è:

$$\mathbf{x}_e = \left[ \frac{T_a}{1 - m/V\rho_a} \quad x_{2d} \quad 0 \right]^T$$

con:

$$u_e = \frac{x_{1e} - T_a}{\theta_t} = \frac{T_a m}{(V\rho_a - m)\theta_t}$$

Si noti che per questa famiglia di punti di equilibrio l'unico parametro che si può effettivamente considerare variabile in modo significativo, in funzione delle condizioni operative del velivolo, è la temperatura ambiente  $T_a$ .

Il calcolo della linearizzazione approssimata permette di ottenere le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C\theta_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(V\rho_a - m)^2}{V\rho_a m T_a} & 0 & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Feedback Linearization

Si può dimostrare con alcuni passaggi che il sistema ha grado relativo pari a 3, pertanto la feedback linearization ingresso-uscita porta anche ad una linearizzazione completa ingresso-stato. Ponendo come nuove variabili di stato:

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T = [x_2 - x_{2d} \quad x_3 \quad -g - \frac{f}{m}x_3 + \frac{gV}{m} \left(1 - \frac{T_a}{x_1}\right) \rho_a]^T$$

e come uscita  $y = z_1$  il sistema è riconducibile ad una forma canonica la cui ultima “riga” è:

$$\dot{z}_3 = \ddot{y} = f_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})u$$

nella quale:

$$f_1 = \frac{g V T_a \left( \frac{T_a}{C \theta_t} - \frac{x_1}{C \theta_t} \right) \rho_a}{m x_1^2} - \frac{f \left( -g - \frac{f x_3}{m} + \frac{g V \left( 1 - \frac{T_a}{x_1} \right) \rho_a}{m} \right)}{m} \quad (2.4)$$

$$b_1 = \frac{g V T_a \rho_a}{C m x_1^2} \quad (2.5)$$

che può essere trasformata in  $\ddot{y} = v$  tramite la legge di controllo  $u = b_1^{-1}(v - f_1)$ , cioè:

$$u = \frac{C m x_1^2 \left( v - \frac{g V T_a \left( \frac{T_a}{C \theta_t} - \frac{x_1}{C \theta_t} \right) \rho_a}{m x_1^2} + \frac{f \left( -g - \frac{f x_3}{m} + \frac{g V \left( 1 - \frac{T_a}{x_1} \right) \rho_a}{m} \right)}{m} \right)}{g V T_a \rho_a}$$

o anche in forma più compatta:

$$u = v \frac{C m x_1^2}{g V T_a \rho_a} - \frac{C f x_1}{m} + \frac{C f x_1^2}{m T_a} - \frac{T_a}{\theta_t} + \frac{x_1}{\theta_t} - \frac{C f x_1^2}{V T_a \rho_a} - \frac{C f^2 x_1^2 x_3}{g m V T_a \rho_a}$$

Si noti che imporre una condizione di regime  $y = 0$ , che corrisponde anche a portare nell’origine il vettore di stato  $\mathbf{z}$ , equivale a portare il sistema originario nella condizione di equilibrio imposta dal set-point  $x_{1d}$ .

## 2.4 COMPITI DI PROGETTO

1. **Controllo LQ:** realizzare simulazioni in ambiente Matlab/Simulink del sistema considerato con controllo di tipo LQ, progettato per l’approximazione lineare definita da  $T_a$  e con matrice di penalizzazione dello stato  $Q$  ( $3 \times 3$ ), scalare di penalizzazione dell’ingresso  $R$  e matrice di penalizzazione stato-ingresso  $N$  ( $3 \times 1$ ) a piacere. Verificare inoltre l’effetto di variazioni di tali matrici sulle prestazioni del controllore.

**N.B.:** si ricordi che essendo  $u_e \neq 0$  nel punto di equilibrio, lo schema di controllo da implementare è quello della slide 6 nelle “Note Applicative” presentate a lezione.

2. **Controllo con Feedback Linearization:** implementare la legge di controllo linearizzante descritta alla sezione 2.3 e sfruttare l’ingresso fittizio  $v$  per realizzare un ulteriore anello di controllo per la regolazione in  $y = 0$ , utilizzando un semplice controllore lineare oppure un controllore Sliding Mode.

**N.B.:** si ricordi che  $\ddot{y} = v$ , pertanto una superficie di sliding idonea può essere:

$$S = \ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \lambda^2 y$$

in base alla quale la legge di controllo per l’ingresso fittizio  $v$  sarà del tipo (il termine di feedforward  $\ddot{y}_d$  non si considera in quanto identicamente nullo):

$$v = -2\lambda\ddot{y} - \lambda^2\dot{y} - K \text{sign}(s)$$

3. **Controllo con Reti Neurali:** una volta ottenute buone prestazioni per almeno uno dei due controllori richiesti ai punti precedenti, effettuare il training di una Rete Neurale con il metodo del Supervised Learning, acquisendo dati di training con uno dei due modelli ottenuti in precedenza, al quale siano applicate delle variazioni random (di entità percentuale tale da **non** rendere il sistema instabile) sia sul set-point  $x_{2d}$  che sulla temperatura ambiente  $T_a$ . Verificare l'effetto di modifiche al numero di neuroni della rete o ai dati di training sulle prestazioni del controllore.

**N.B.:** è suggeribile utilizzare come ingressi della rete il set-point, gli stati misurati e la temperatura ambiente  $T_a$ . Totale ingressi della rete: 5 (1, set-point, + 1,  $T_a$ , + 3 stati misurati).

4. **Controllo con Logica Fuzzy:** una possibile strategia di progetto per un controllore Fuzzy, potrebbe essere quella del Fuzzy Gain Scheduling, che prevede di sfruttare tecniche di progetto per controllori lineari (es. LQ) per ottenere i parametri di alcuni regolatori validi per rispettive approssimazioni lineari con diversi valori di  $T_a$  ( $T_{a,1}$ ,  $T_{a,2}$ , ecc.). Tali valori  $T_{a,i}$  corrisponderanno poi ai valori centrali delle funzioni membership per la fuzzificazione dell'ingresso del regolatore Fuzzy, il quale potrà combinare i controllori lineari grazie all'approccio Sugeno, con regole del tipo:

**IF**  $T_a$  is  $T_{a,i}$  **THEN**  $u = \mathbf{K}_i(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + u_{d,i}$

**N.B.:** si noti che nel Fuzzy Logic Toolbox di Matlab, i sistemi Sugeno hanno funzioni di output del tipo:

$$\text{out} = a \cdot \text{in1} + b \cdot \text{in2} + \dots + c$$

Pertanto, per implementare i vari regolatori lineari, sarà necessario che il sistema Fuzzy abbia come ingressi tutti gli elementi di  $\mathbf{x}_d$  e di  $\mathbf{x}$  e che i parametri  $a, b \dots$  siano determinati correttamente in base agli elementi delle varie matrici  $\mathbf{K}_i$  (es. se il primo ingresso in1 viene associato a  $x_1$ , il parametro  $a$  dovrà essere  $\mathbf{K}_{i,1}$ , cioè il primo elemento della matrice, mentre se in1 viene associato a  $x_{1d}$ ,  $a$  dovrà essere  $-\mathbf{K}_{i,1}$ . La costante  $c$  sarà invece sempre pari a  $u_{d,i}$ ).

5. **ESPERIMENTI COMPARATIVI:** verificare le prestazioni e la robustezza di tutti i sistemi di controllo progettati, rispetto a variazioni (**considerate separatamente**):
- di  $\pm 1$  °C della temperatura ambiente  $T_a$
  - di  $\pm 10$  % del set-point
  - di  $\pm 5$  % della massa  $M$ .

Tali variazioni possono essere applicate come gradini durante la simulazione, oppure modificando i valori iniziali della simulazione, purchè sia riportato nella relazione finale un grafico comparativo che evidenzi la differenza di comportamento tra la condizione nominale e quella perturbata.

## 2.5 PARAMETRI NUMERICI DA UTILIZZARE

Dato il numero di matricola dello studente con sei cifre  $m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6$ , fissare i parametri del modello come segue (oltre a  $g = 9.80665$  m/s<sup>2</sup>):

- Massa dell'aerostato:  $m = m_1 m_2$  Kg (se  $m_1$  e/o  $m_2$  sono = 0, sostituirla/e con la/e cifra/e immediatamente successiva/e)
- Volume dell'aerostato:  $V = 2m m_6$  m<sup>3</sup> (se  $m_6 = 0$  sostituirla con 5)
- Capacità termica del pallone:  $C = V \rho_a c_a$  J/°C, con  $\rho_a = 1.2928$  kg/m<sup>3</sup> e  $c_a = 1008$  J/°C kg.
- Resistenza termica tra aerostato e ambiente:  $\theta_t = m_5/50$  °C/W (se  $m_5 = 0$  sostituirla con 4)
- Coefficiente di attrito viscoso aerodinamico:  $f = m_5, m_6$  N s / m (se  $m_5$  e/o  $m_6$  sono = 0, sostituirla/e con la/e cifra/e immediatamente precedente/i)

Indipendentemente da questi parametri invece, fissare:

- Temperatura ambiente 20 °C (293.15 °K)

- Condizioni iniziali:

$$\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ x_{30}]^T = \left[ \frac{293.15}{1 - m/V\rho_a} \quad 100 \quad 0 \right]^T$$

- Set-point:

$$\mathbf{x}_d = [x_{1d} \ x_{2d} \ x_{3d}]^T = \left[ \frac{293.15}{1 - m/V\rho_a} \quad 120 \quad 0 \right]^T$$