

**lezione 1**

# Sistemi di Controllo Digitale

## Introduzione

---

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria  
v. Saragat, 1E, I-44122, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- **PROCESSO:**

Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

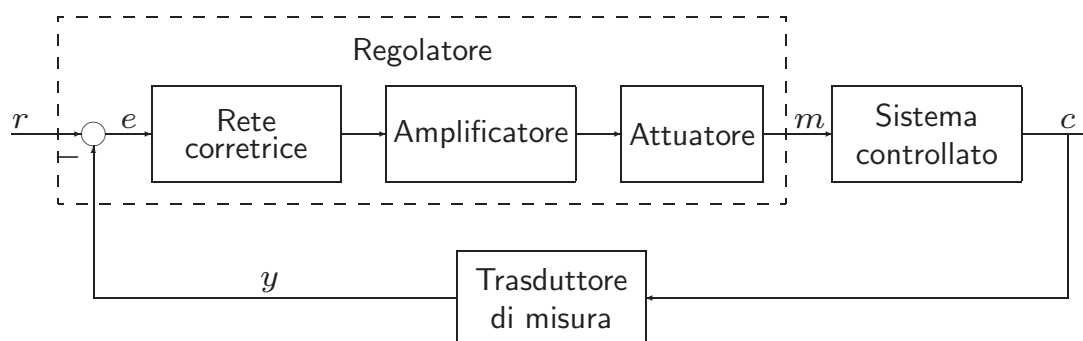
- **CONTROLLO DEI PROCESSI:**

Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

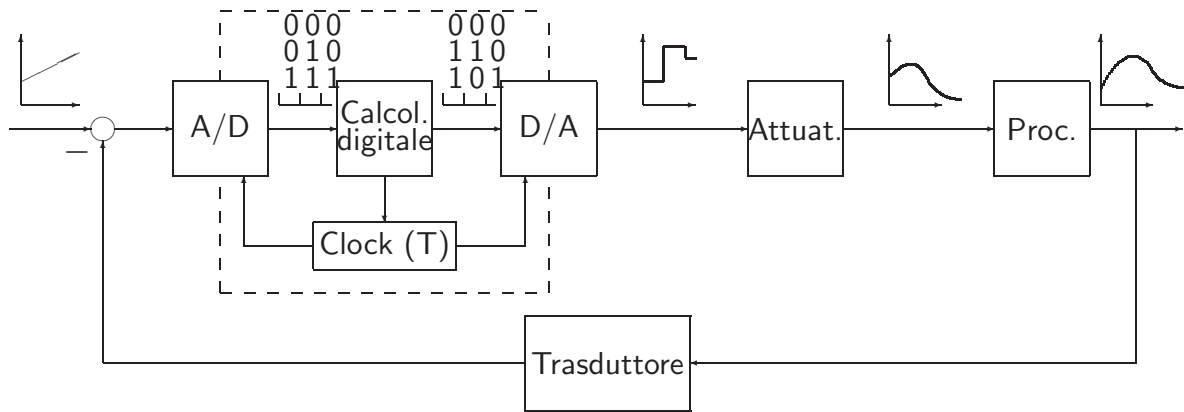
- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:**

Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

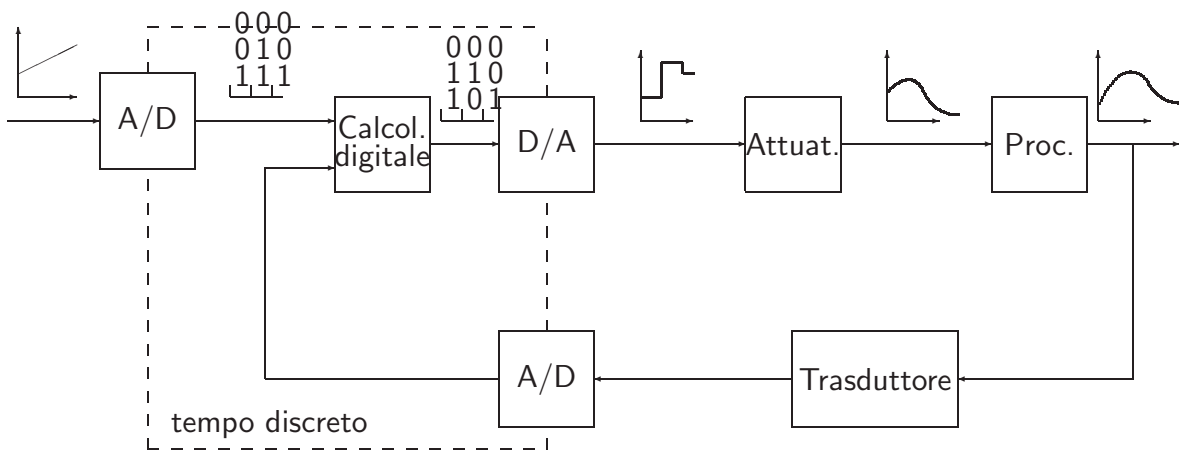
### SCHEMA TIPICO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO



### SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (1)



### SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (2)

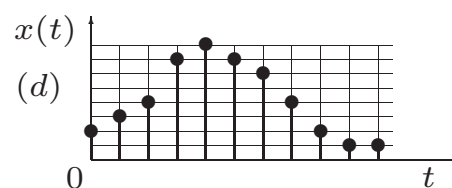
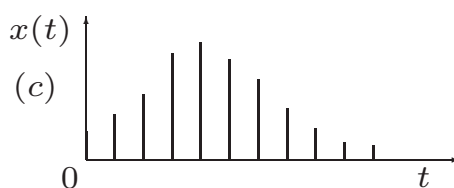
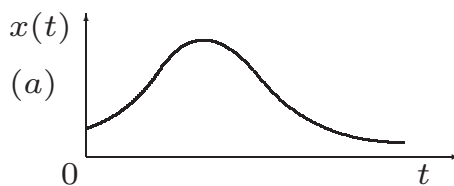


**● CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO :**

- + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
- + Maggiore flessibilità
- + Maggiore affidabilità e ripetibilità
- + Maggiore trasmissibilità dei segnali
- Progettazione più difficile e articolata
- Stabilizzabilità più precaria
- Possibilità di arresti non previsti
- Necessità di utilizzare energia elettrica

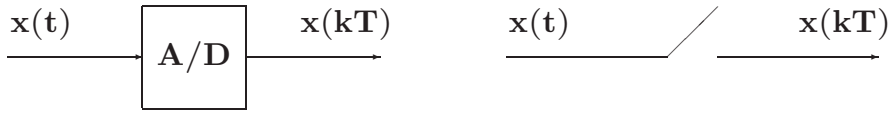
**SEGNALI DI INTERESSE**

a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale

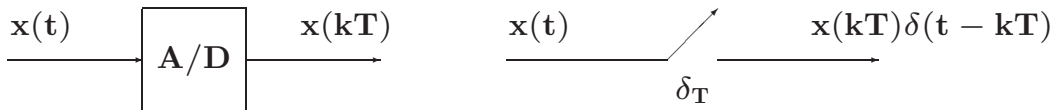


## DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

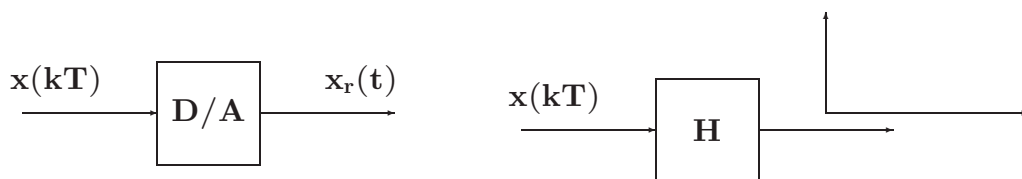
- A/D, convertitore Analogico/Digitale



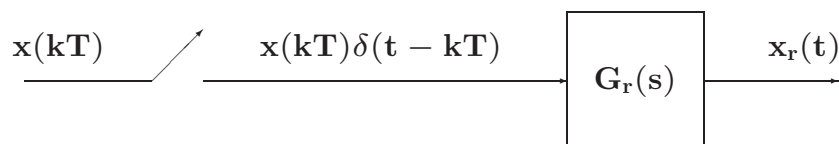
**Con campionamento modellato ad impulsi di Dirac:**



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



**Modello:**



**Caso dell'Hold:**

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

## ANELLO DI CONTROLLO DIGITALE

- Parte tempo continua: processo/impianto
- Parte tempo discreta: sistema di controllo
- Campionamento regolare di periodo  $T$
- Trasformata Zeta

## lezione 2

### Modelli per Sistemi a Tempo Discreto

- **Equazione alle differenze:**

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$$

Se  $\mathbf{f}(\cdot)$  è lineare:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \dots - \mathbf{a}_n \mathbf{u}_{k-n} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k + \dots + \mathbf{b}_m \mathbf{e}_{k-m}$$

**Esempio:**

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_{k-2} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k - \nabla \mathbf{u}_k$$

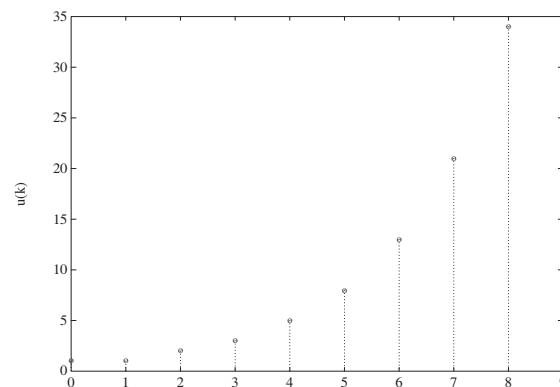
$$\mathbf{u}_{k-2} = \mathbf{u}_k - 2\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^2 \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{a}_2 \nabla^2 \mathbf{u}_k - (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) \nabla \mathbf{u}_k + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 + 1) \mathbf{u}_k = \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k$$

- **Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti**

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-2} \quad \mathbf{k} \geq 2$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = 1.$$



- **Soluzione elementare tipo  $z^k$ :**

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale vale:

$$\mathbf{u}_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

con  $c_1, c_2$  determinate dalle condizioni iniziali per  $k = 0, 1$ . Infine si ha

$$\mathbf{u}_k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Andamento divergente, dunque sistema instabile.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita
- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita



- Sia data una sequenza di valori  $x_k \in \mathfrak{R}$ , definita per  $k = 0, 1, 2, \dots$  e nulla per  $k < 0$ . La **Z-trasformata (unilatera) della sequenza**  $x_k$  è la funzione di variabile complessa  $z$  definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[x_k] &= x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori  $x_k$  sia ottenuta campionando uniformemente con periodo  $\mathbf{T}$  un segnale continuo descritto dalla funzione  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , si avrà che  $x_k = x(k\mathbf{T})$ :

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

- L'espressione estesa

$$\mathbf{X}(z) = x(0) + x(\mathbf{T}) z^{-1} + x(2\mathbf{T}) z^{-2} + \dots + x(k\mathbf{T}) z^{-k} + \dots$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento**  $\mathbf{T}$ , da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{X}(s)]$$

intendendo:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)]\Big|_{t=k\mathbf{T}}\right\}\right]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione  $X(z)$  assume in generale una espressione **razionale fratta** del tipo

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di  $z^{-1}$ :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^n (b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n})}{z^n (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} \\ &= \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

- **Esempio:**

$$X(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2 z^{-1})}$$

- **Impulso discreto unitario**, detta anche funzione di Kronecker  $\delta_0(t)$ :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \dots = 1 \end{aligned}$$

- **Gradino unitario:** Sia data la funzione gradino unitario

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La funzione  $\mathbf{h}(k)$  definita come

$$\mathbf{h}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

è detta **sequenza unitaria**. Si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \mathcal{Z}[\mathbf{h}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per  $|z| > 1$ .

- **Rampa unitaria.** Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{x}(kT) = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , la  $\mathcal{Z}$ -trasformata è

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) \\ &= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

convergente per  $|z| > 1$ .

- **Funzione potenza  $a^k$ .** Sia data la funzione

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con  $a$  costante reale o complessa. Dalla definizione di  $\mathcal{Z}$ -trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per  $|z| > |a|$ .

- **Funzione esponenziale.** Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove  $a$  è una costante reale o complessa. Poichè  $x(kT) = e^{-akT}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

che converge per  $|z| > e^{-\text{Re}(a)T}$ . Si noti che per  $a = 0$  si ha il gradino unitario.

- **Funzione sinusoidale.** Sia data la sinusoide

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

convergente per  $|z| > 1$ .

- **Funzione cosinusoidale.** Sia data la funzione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

- **Funzione cosinusoidale smorzata.** Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z} [e^{-at} \cos \omega t] = \frac{1}{2} \mathcal{Z} [(e^{-at} e^{j\omega t} + e^{-at} e^{-j\omega t})] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{-(a-j\omega)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(a+j\omega)T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) e^{-aT} z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- **Funzione sinusoidale smorzata**

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z} \left[ e^{-at} \sin \omega t \right] \\ &= \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT} z \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- Le trasformate delle funzioni di maggior interesse sono solitamente riportate in **tabelle**

**lezione 3**

## Trasformata $\mathcal{Z}$

- **Esempio:**  $\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
- Prima tecnica:  $\mathbf{x}(t) = 1 - e^{-t}$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}\left[1 - e^{-t}\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})}\end{aligned}$$

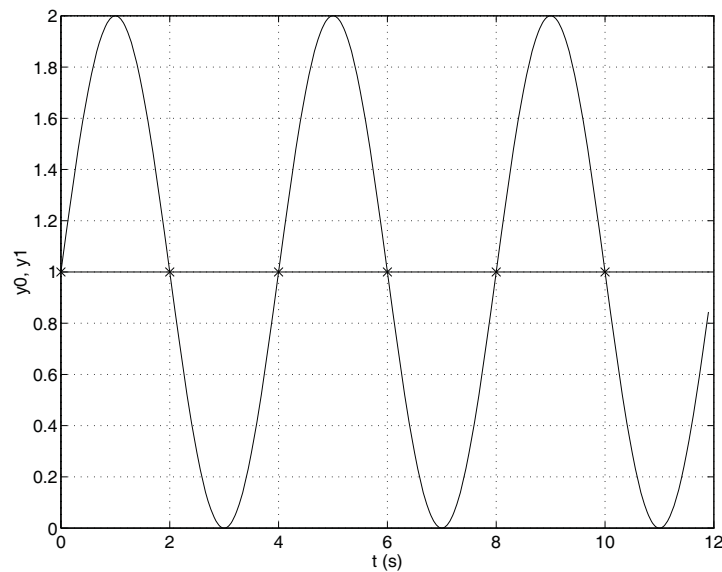
- Seconda tecnica:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(s) &= \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} \\ \mathbf{X}(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}\end{aligned}$$

- La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $\mathbf{X}(z)$  e la sua sequenza corrispondente  $\mathbf{x}(k)$  sono legate da una **corrispondenza biunivoca**
- Questo **non** avviene in genere tra la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $\mathbf{X}(z)$  e la sua "inversa"  $\mathbf{x}(t)$
- Data una  $\mathbf{X}(z)$  si possono in genere avere **molte**  $\mathbf{x}(t)$
- Questa ambiguità **non** sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su  $\mathbf{T}$  dettate dal **Teorema di Shannon**



- **Diverse** funzioni tempo continuo possono avere gli **stessi** valori  $x(k)$



- **PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA  $\mathcal{Z}$ -TRASFORMATA**

- **Linearità:**

$$\mathbf{x}(k) = a\mathbf{f}(k) + b\mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{X}(z) = a\mathbf{F}(z) + b\mathbf{G}(z)$$

- **Moltiplicazione per  $a^k$ .** Sia  $\mathbf{X}(z)$  la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $\mathbf{x}(k)$ ,  $a$  una costante.

$$\mathcal{Z} [a^k \mathbf{x}(k)] = \mathbf{X}(a^{-1}z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [a^k \mathbf{x}(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathbf{x}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) (a^{-1}z)^{-k} \\ &= \mathbf{X}(a^{-1}z) \end{aligned}$$

- **Teorema della traslazione nel tempo.** Se  $x(t) = 0, t < 0$ ,  $\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$ , e  $n = 1, 2, \dots$ , allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}\mathbf{X}(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[ \mathbf{X}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

Operativamente:

$$z^{-1}\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k - 1)$$

$$z^{-2}\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k - 2)$$

$$z \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k + 1)$$

e così via.

- **Caso di ritardo:**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-(k-n)} \end{aligned}$$

da cui, ponendo  $m = k - n$ ,

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

Poichè  $x(mT) = 0$  per  $m < 0$ , allora si può scrivere che

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}\mathbf{X}(z)$$

- **Caso dell'antico:**

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} \\
 &= z^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
 &= z^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
 &= z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right]
 \end{aligned}$$

- **Teorema del valore iniziale.**

Se  $X(z)$  è la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(t)$  e se esiste il  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ , allora il valore iniziale  $x(0)$  di  $x(t)$  è dato da:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Infatti, si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

- **Teorema del valore finale.** Siano tutti i poli di  $\mathbf{X}(z)$  all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per  $z = 1$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \mathbf{X}(z) \right]$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1) z^{-k} &= \mathbf{X}(z) - z^{-1} \mathbf{X}(z) \\ \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1) z^{-k} \right] &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)] \\ &= [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(-1)] + [\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)] + [\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1)] + \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- **Esempio:** Si consideri il segnale descritto da

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza  $\mathbf{x}(kT)$  è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mathbf{T}(z+1)}{2(z-0.5)} \\ &= 2\mathbf{T} \end{aligned}$$

- **Differenziazione complessa:**

$$\mathcal{Z}[k x(k)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$\mathcal{Z}[k^m x(k)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

- **Esempio:** È noto che la  $\mathcal{Z}$ -trasformata del gradino unitario è

$$\mathcal{Z}[h(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Per ottenere la trasformata del segnale rampa unitaria

$$x(k) = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{Z}[kT h(k)] = -Tz \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

- **Integrazione complessa.**

Si consideri la sequenza

$$g(k) = \frac{x(k)}{k}$$

dove  $x(k)/k$  è finito per  $k = 0$ , e sia  $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$ . La  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(k)/k$  è data da

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{X(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x(k)}{k}$$

- **Teorema della convoluzione reale.** Siano date due funzioni  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , con  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ ,  $t < 0$  e  $\mathcal{Z}$ -trasformate  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$ . Allora

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(hT)x_2(kT - hT)\right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(h) x_2(k-h)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k x_1(h) x_2(k-h) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h) x_2(k-h) z^{-k} \end{aligned}$$

poichè  $x_2(k-h) = 0$ ,  $h > k$ . Definendo  $m = k - h$  si ha

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(h) x_2(k-h)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h) z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(m) z^{-m}$$

- **Teorema della convoluzione complessa.**

Siano date due successioni  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  nulle per  $k < 0$ . Inoltre siano  $X_1(z)$  e  $X_2(z)$  le trasformate delle due successioni e siano  $R_1, R_2$  i rispettivi raggi di convergenza. Allora la  $\mathcal{Z}$ -trasformata del prodotto  $x_1(k)x_2(k)$  è data da:

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta$$

- **Teorema di Parseval.** Siano date due sequenze  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  nulle per  $k < 0$ . Inoltre siano  $X_1(z)$  e  $X_2(z)$  le trasformate delle due successioni.

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]]_{|z|=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta \end{aligned}$$

Per  $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X(\zeta) X(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-1} X(z) X(z^{-1}) dz \end{aligned}$$

- **Trasformazione di funzioni periodiche.**

Sia data una successione  $x_p(k)$  periodica di periodo  $pT$  e  $x(k)$  la successione dei campioni del primo periodo e nulla per  $k > p$

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \dots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se  $X(z)$  è la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(k)$  allora vale

$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

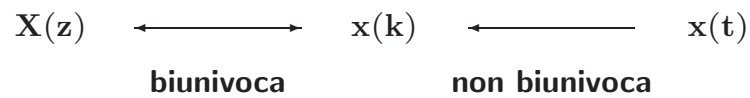
## Lezione 4

### Antitrasformata $\mathcal{Z}$



- **LA ANTITRASFORMATA  $\mathcal{Z}$**

- Permette di passare da una  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $\mathbf{X}(z)$  alla corrispondente sequenza  $\mathbf{x}_k$  e possibilmente alla funzione continua  $\mathbf{x}(t)$  cui corrisponde per campionamento la sequenza  $\mathbf{x}_k$ .



- Se è soddisfatto il **Teorema di Shannon** sul campionamento, la funzione continua  $\mathbf{x}(t)$  può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza  $\mathbf{x}_k$ .

- Diversi **metodi per antitrasformare** una funzione  $\mathbf{X}(z)$ :

- 1) Metodo della lunga divisione;
- 2) Metodo computazionale;
- 3) Metodo della scomposizione in fratti semplici;
- 4) Metodo dell'integrale di inversione.

- **Metodo della scomposizione in fratti semplici**

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

- **Caso 1.** Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti  $c_i$ , detti "residui", sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i)X(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di  $X(z)$  compare almeno **uno zero nell'origine**, si utilizza la funzione  $X(z)/z$  e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} \quad c_i = \left[ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti **poli complessi coniugati**, i coefficienti  $c_i$  sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

- **Caso 2.** Se  $X(z)$ , o  $X(z)/z$ , ha **poli multipli**

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \dots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \dots, h; \quad k = 1, \dots, r_i$$

- **Esempio.** Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z + 2)^2 (z + 1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z + 2)^2} + \frac{c_{12}}{(z + 2)} + \frac{c_{21}}{(z + 1)^2} + \frac{c_{22}}{(z + 1)}$$

$$c_{11} = [(z + 2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1$$

$$c_{12} = \left[ \frac{d}{dz} (z + 2)^2 X(z) \right]_{z=-2} = 2$$

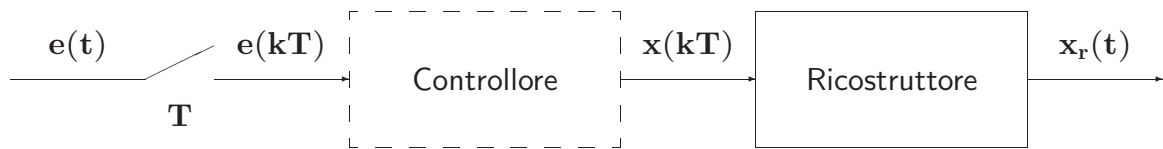
$$c_{21} = [(z + 1)^2 X(z)]_{z=-1} = 1$$

$$c_{22} = \left[ \frac{d}{dz} (z + 1)^2 X(z) \right]_{z=-1} = -2$$

## Lezione 5

### Il Problema del Campionamento

- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una **parte continua** (il processo da controllare) e una **parte discreta** (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo **discreto** sia variabili a tempo **continuo**
- I dispositivi di interfaccia sono il **campionatore** e il **ricostruttore**



- Ricostruttore di ordine zero:

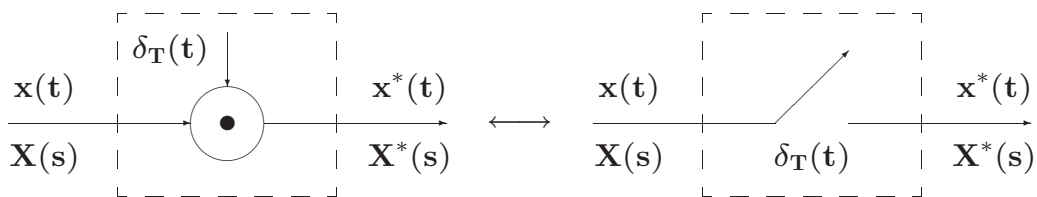
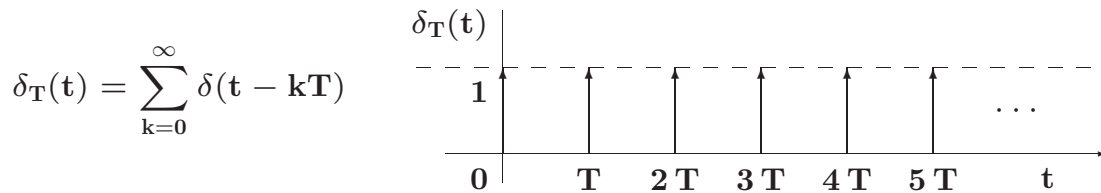
$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)]$$

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[ \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right]$$

$$= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

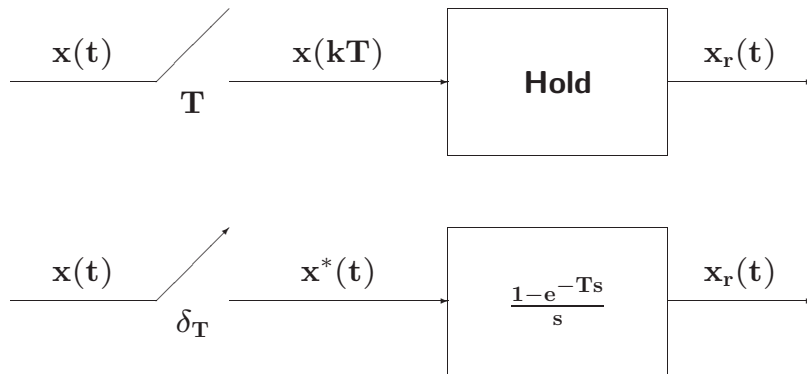
$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$



- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali
- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

- La trasformata zeta della sequenza  $x(kT)$  anzichè la trasformata di Laplace del segnale  $x^*(t)$  permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) \delta_T(t) = \mathbf{x}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

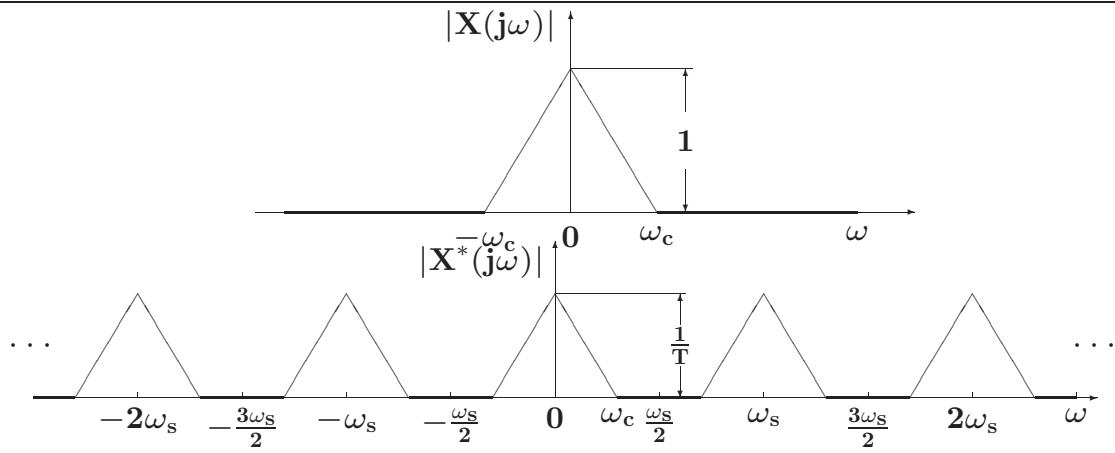
ne segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{x}(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \left[ \mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t} \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(s - jn\omega_s)$$

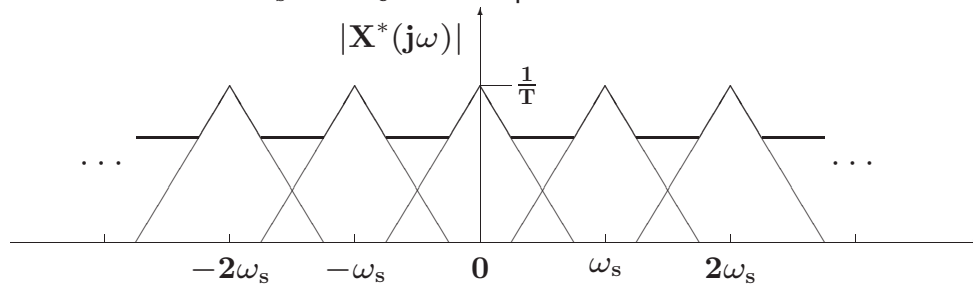
- A meno della costante moltiplicativa  $1/T$ , la trasformata di Laplace  $\mathbf{X}^*(s)$  del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini,  $\mathbf{X}(s - jn\omega_s)$ , ciascuno dei quali si ottiene dalla  $\mathbf{X}(s)$  mediante traslazione di  $jn\omega_s$  nel campo complesso.
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$\mathbf{X}^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(j\omega - jn\omega_s)$$



- La condizione  $\omega_s > 2\omega_c$  mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale  $x(t)$

- Nel caso in cui la condizione  $\omega_s > 2\omega_c$  non è rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato



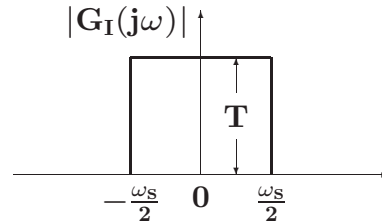
● **Teorema di Shannon**

Sia  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  la pulsazione di campionamento ( $T$  è il periodo di campionamento), e sia  $\omega_c$  la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo  $x(t)$ . Il segnale  $x(t)$  è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato  $x^*(t)$  se e solo se la pulsazione  $\omega_s$  è maggiore del doppio della pulsazione  $\omega_c$ :

$$\omega_s > 2\omega_c$$

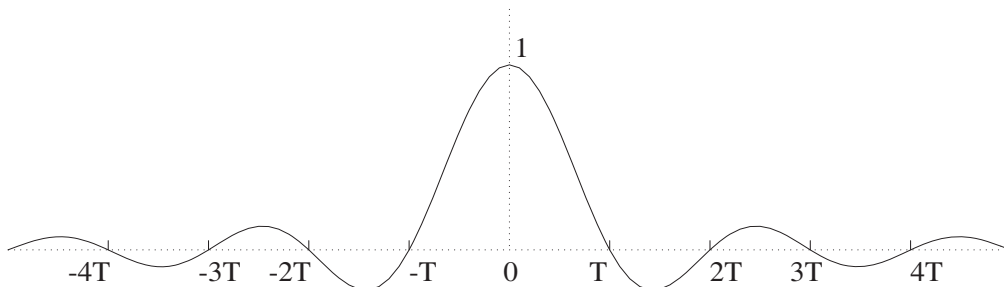
● Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



● Il filtro ideale  $G_I(j\omega)$  non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso vale:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(\tau) \mathbf{g}_I(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t-\tau)/2)}{\omega_s(t-\tau)/2} d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(kT) \frac{\sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2}
 \end{aligned}$$

- Occorrono tutti i campioni  $\mathbf{x}(kT)$  passati e futuri
- Si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili

- **Aliasing:** Con il termine **aliasing** si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.
- Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione  $\omega_s > 2\omega_c$  del teorema di Shannon non sia verificata

- **Esempio:**

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega_2 t + \theta) \\ y(t) = \sin((\omega_2 + n\omega_s)t + \theta) \end{cases}$$

aventi stessa fase  $\theta$  e pulsazione che differisce di un multiplo intero di  $\omega_s$ .

- Se i due segnali vengono campionati

$$\begin{cases} x(kT) = \sin(\omega_2 kT + \theta) \\ y(kT) = \sin((\omega_2 + n\omega_s)kT + \theta) \\ = \sin(\omega_2 kT + 2k\pi n + \theta) \\ = \sin(\omega_2 kT + \theta) \end{cases}$$

- I valori campionati coincidono:  $x(kT) = y(kT)$

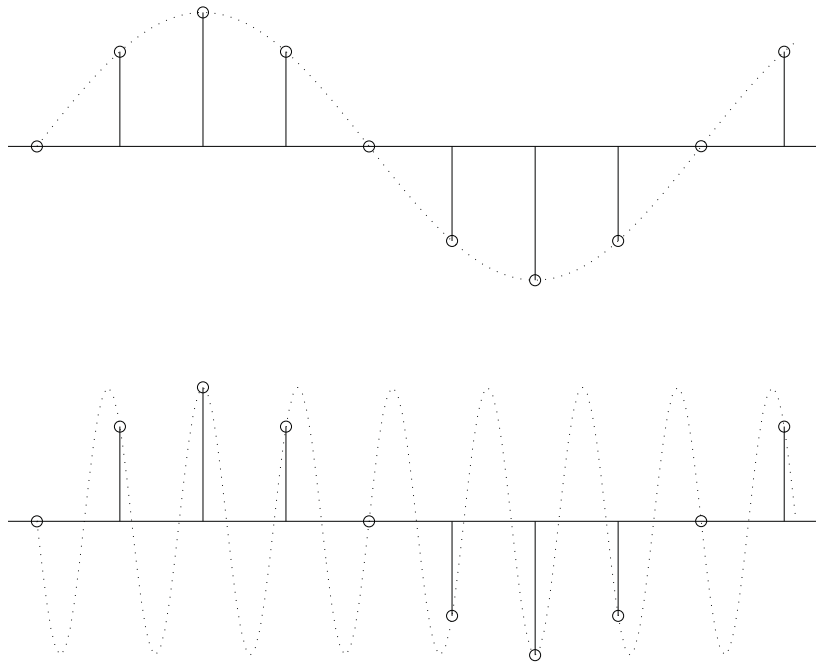
- **Esempio:**  $\omega_2 + \omega_1 = n\omega_s$

- Posto  $\omega_1 = \frac{1}{8}\omega_s$  e  $\omega_2 = \omega_s - \omega_1 = \frac{7}{8}\omega_s$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega_1 t) = \sin(\omega_s t / 8) \\ y(t) = \sin(\omega_2 t) = \sin(7\omega_s t / 8 + \pi) \end{cases}$$

- Campionando si ha

$$\begin{cases} x(kT) = \sin(\omega_s kT / 8) = \sin(2k\pi / 8) \\ = \sin(k\pi / 4) \\ y(kT) = \sin(7\omega_s kT / 8 + \pi) = \sin(7k\pi / 4 + \pi) \\ = \sin(k\pi / 4) \end{cases}$$



- Per evitare fenomeni di aliasing si deve provvedere ad introdurre un opportuno filtraggio passa-basso **prima** del campionatore.

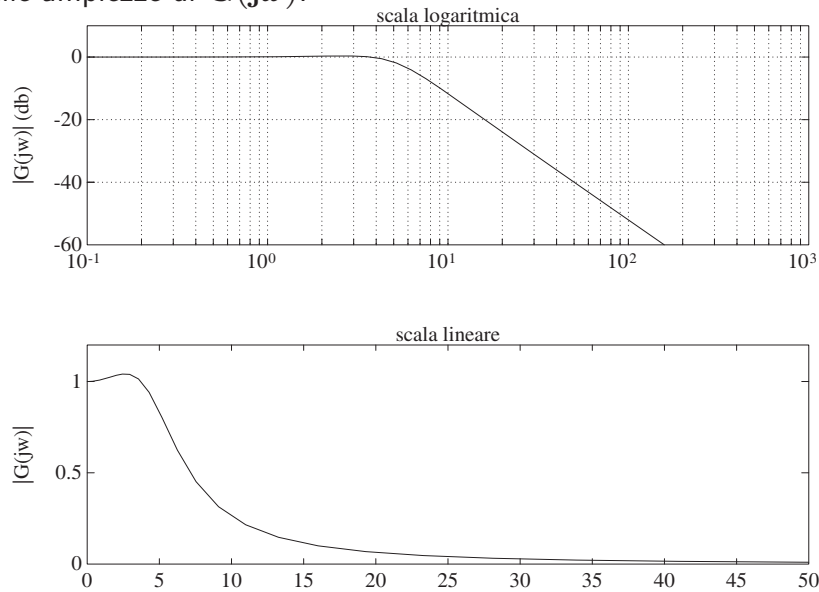
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

- Il sistema  $G(s)$  ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati  $p_{1,2} = -3 \pm j4$ , pulsazione naturale  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  e coefficiente di smorzamento  $\delta = 3/5$

$$G(s) = \frac{25}{(s + 3)^2 + 4^2}$$

- Diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega)$ :



- Per  $\omega > 10\omega_n = 50 \text{ rad/s} = \bar{\omega}$ , l'ampiezza di  $G(j\omega)$  è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico

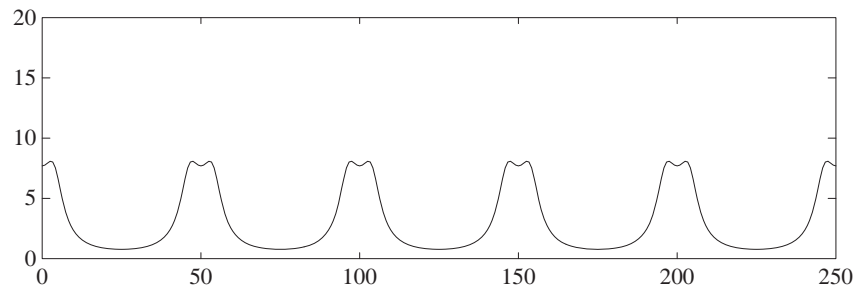
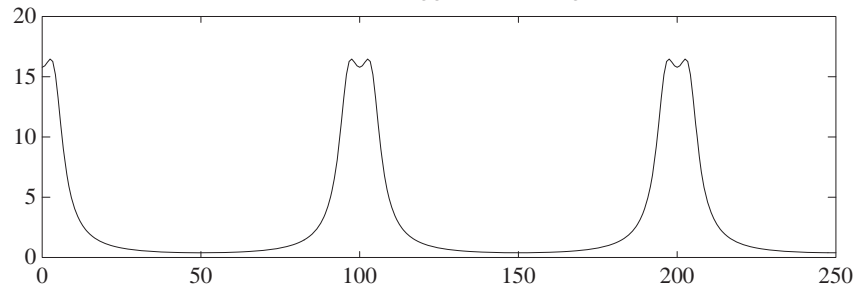
- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di  $\bar{\omega} = 50 \text{ rad/s}$
- Applicando la  $\mathcal{Z}$ -trasformata si ha

$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T) z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T) z + e^{-6T}}$$

- La risposta spettrale è data da

$$G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Andamento spettrale di  $G^*(j\omega)$  quando  $T = \frac{\pi}{50}$  e  $T = \frac{\pi}{25}$



## Lezione 6

### Ricostruttori di Segnale - Relazione tra Piano $s$ e Piano $z$

• Tipici ricostruttori di segnale

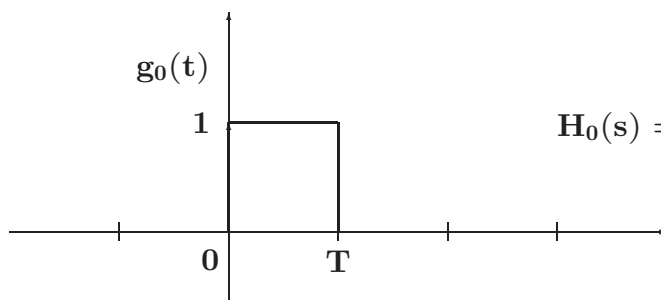


$$x(t) = x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t-kT)^2}{2!} + \dots$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \dots$$

• Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



$$H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned}
 H_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j} \\
 &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}
 \end{aligned}$$

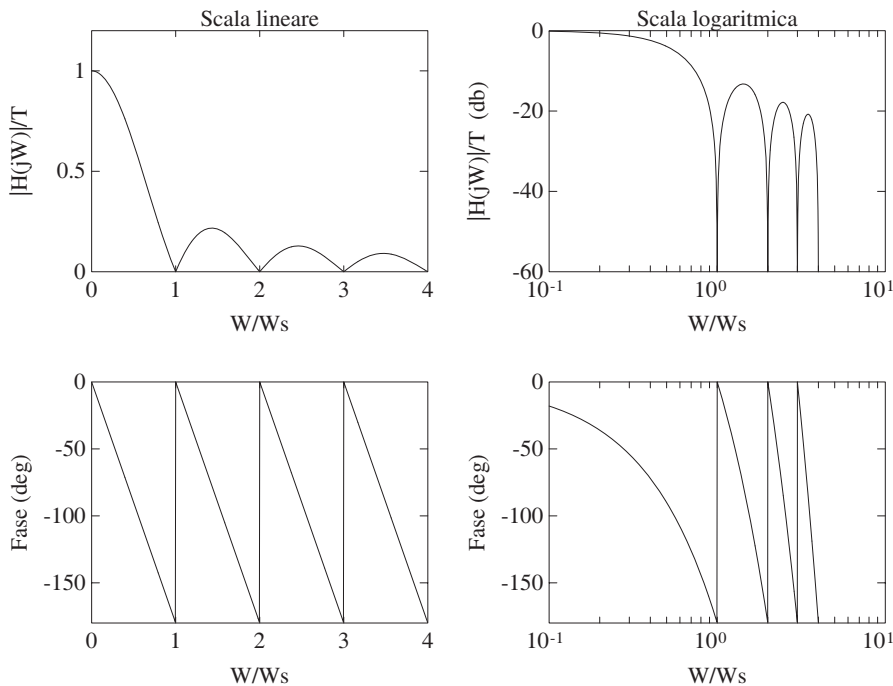
- Modulo

$$|H_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

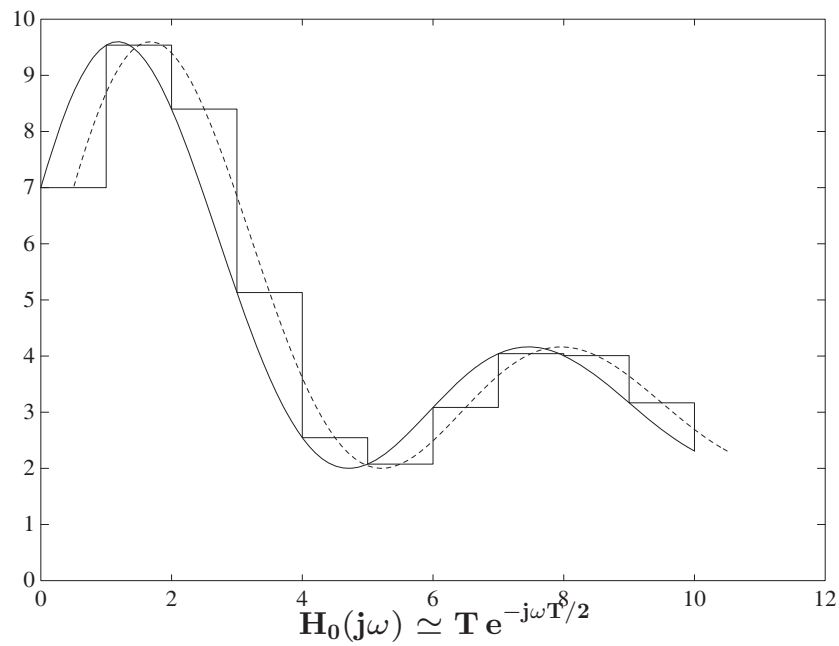
- Fase

$$\text{Arg}[H_0(j\omega)] = \text{Arg}\left[\sin \frac{\omega T}{2}\right] - \frac{\omega T}{2}$$

- Ricostruttore di ordine zero







- Corrispondenza tra piano  $s$  e piano  $z$

$$\mathbf{X}^*(s) = \mathbf{X}(z)|_{z=e^{sT}}$$

- Le variabili complesse  $s$  e  $z$  sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

- Posto  $s = \sigma + j\omega$  si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano  $z$  è in corrispondenza con infiniti punti del piano  $s$

- I punti del piano  $s$  a parte reale negativa ( $\sigma < 0$ ) sono in corrispondenza con i punti del piano  $z$  all'interno del cerchio unitario:

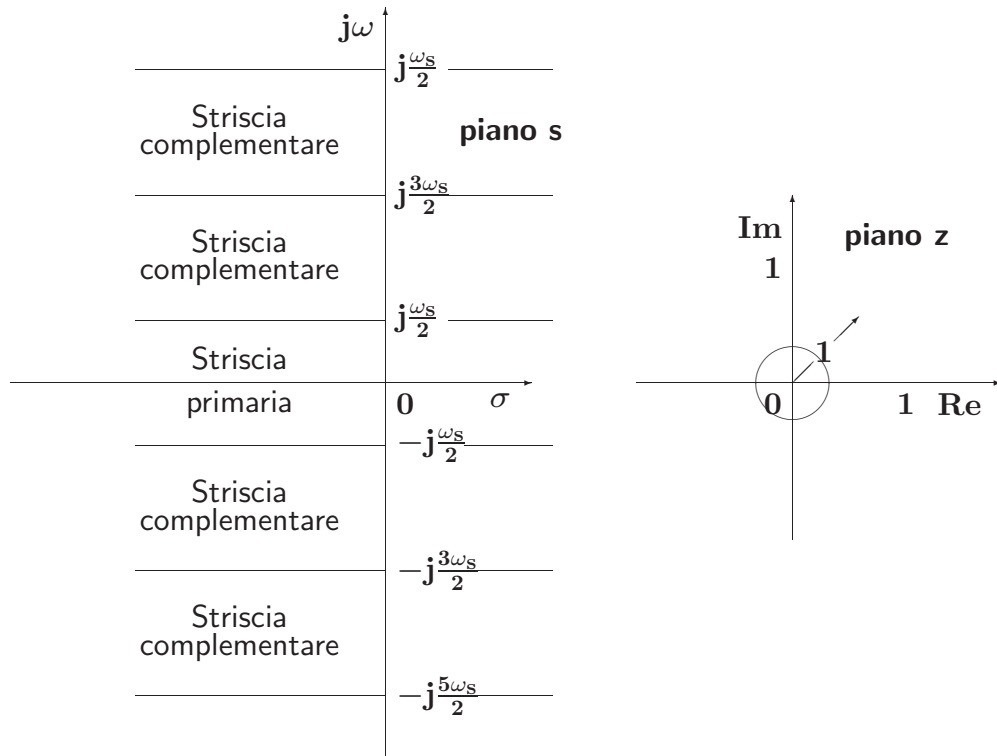
$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ( $\sigma = 0$ ) vengono mappati sul cerchio unitario ( $|z| = 1$ ), mentre quelli a parte reale positiva ( $\sigma > 0$ ) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ( $|z| > 1$ ).
- La striscia di piano  $s$  delimitata dalle rette orizzontali  $s = j\omega_s/2$  e  $s = -j\omega_s/2$  prende il nome di **striscia primaria**

## Lezione 7

### Funzioni di Trasferimento Discrete

• Striscia primaria e Strisce complementari



• Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

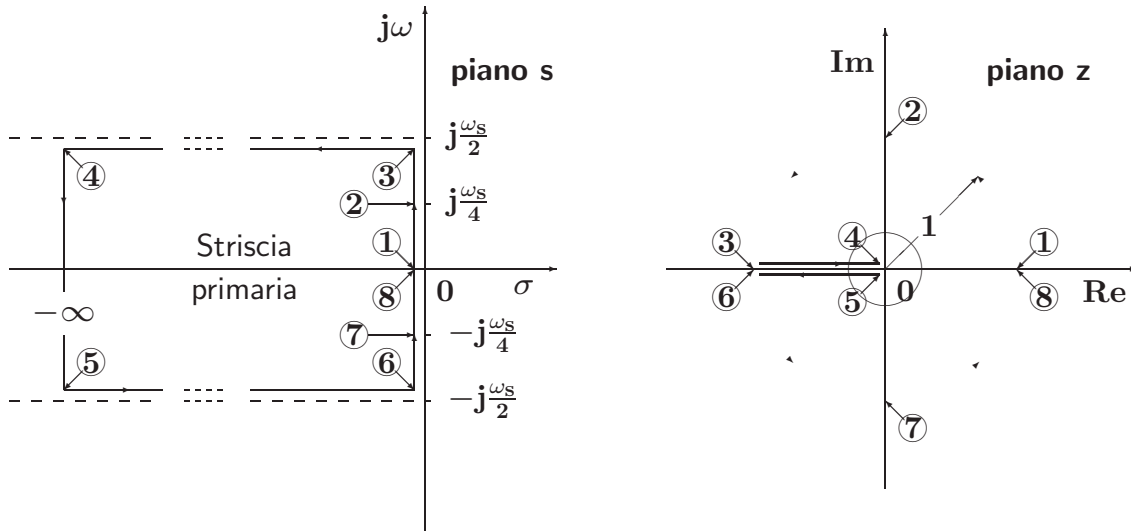
• Posto  $s = \sigma + j\omega$  si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

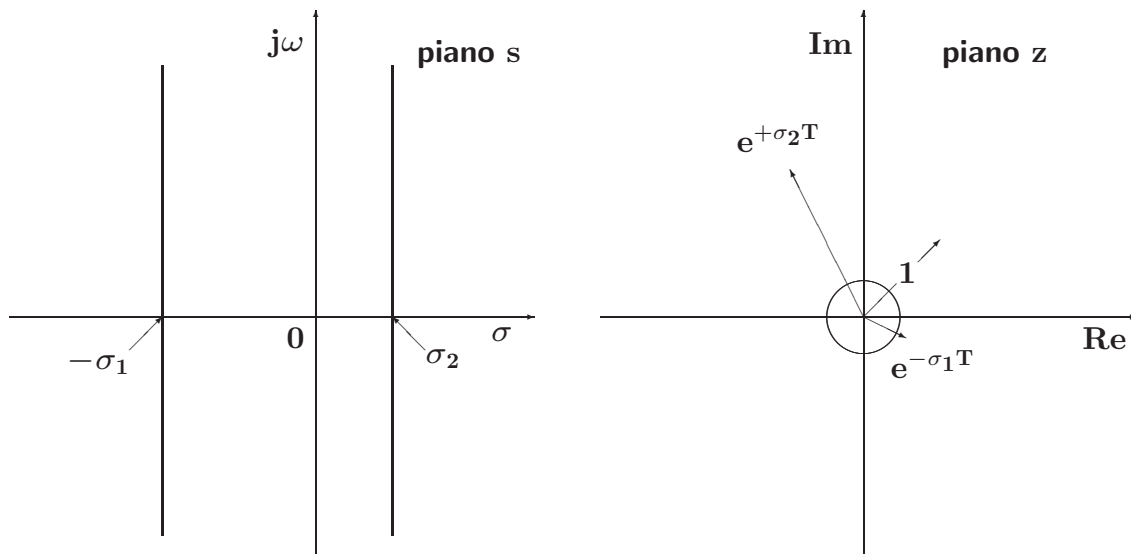
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

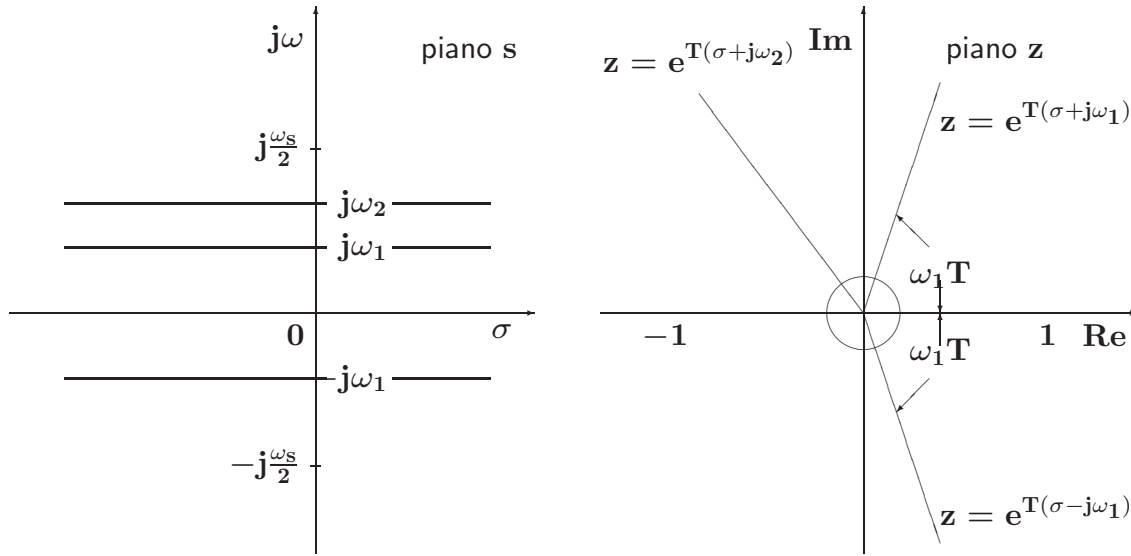
• Mapping tra striscia primaria e piano z



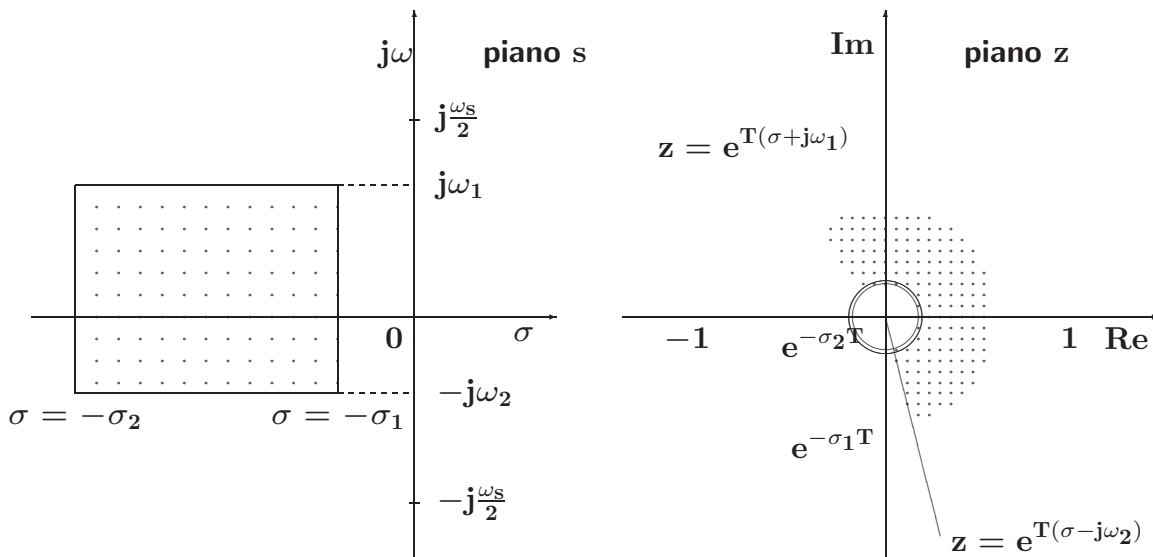
• Luoghi a decadimento esponenziale costante



● Luoghi a pulsazione costante



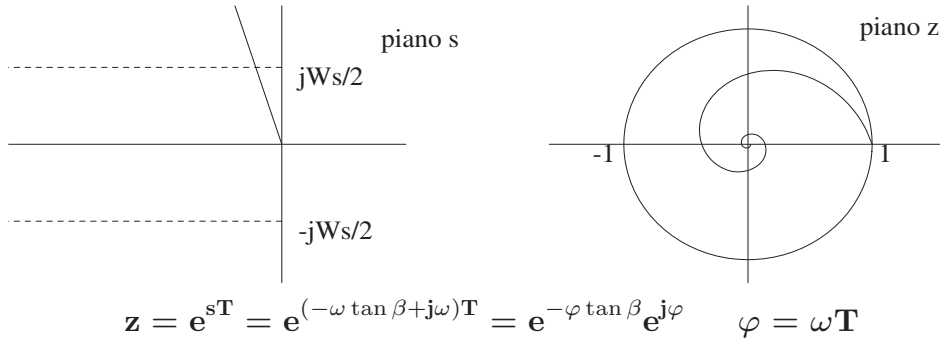
● Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



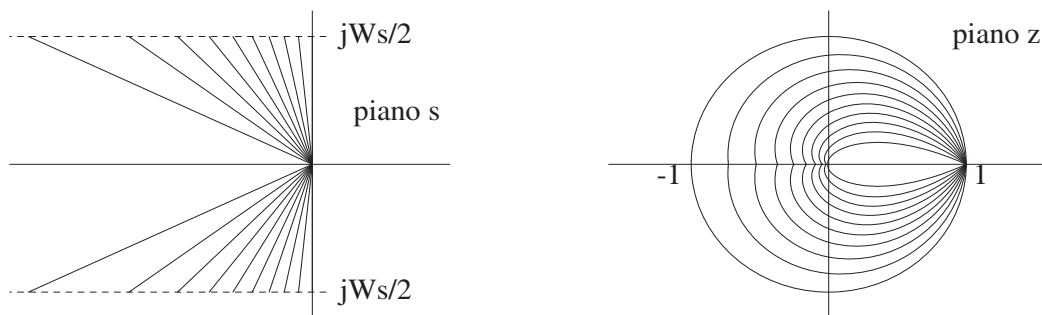
- Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento costante  $\delta = \delta_1$

$$s = -\omega \tan \beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} + j\omega$$

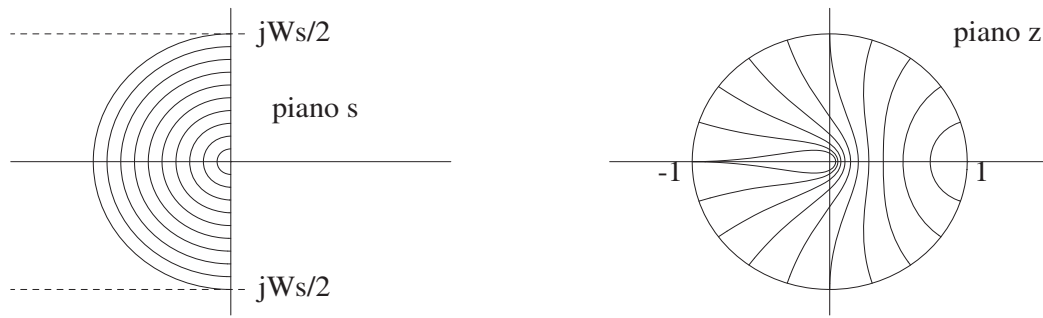
$$\beta = \arcsin \delta_1$$



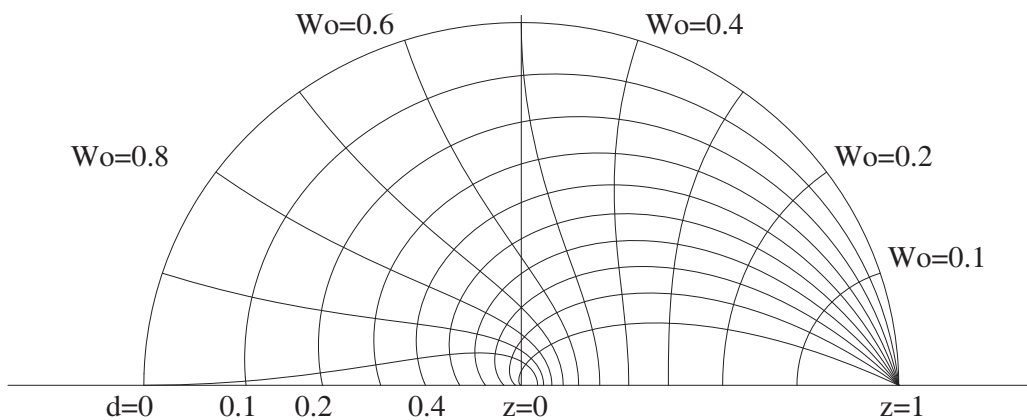
- Luoghi a coefficiente di smorzamento  $\delta$  costante



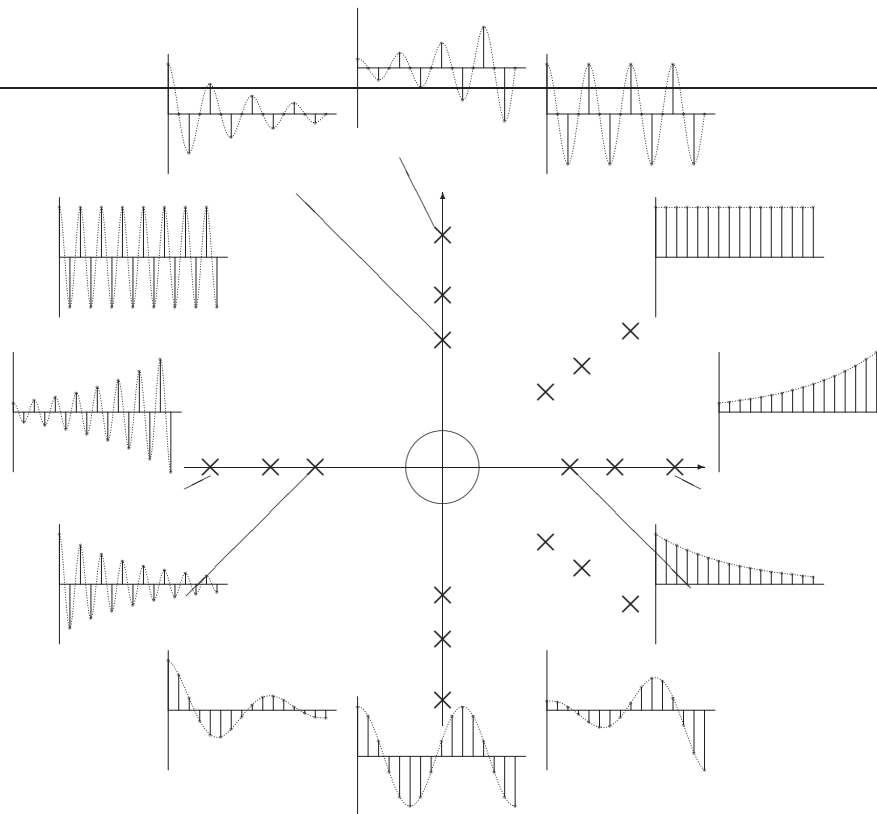
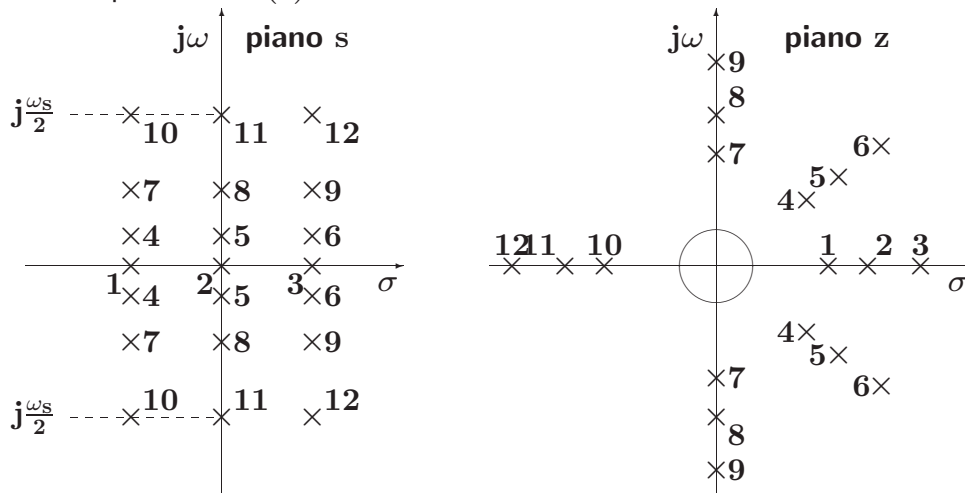
● Luoghi a pulsazione naturale  $\omega_n$  costante



● Luoghi del piano z a  $\delta$  e  $\omega_n$  costanti



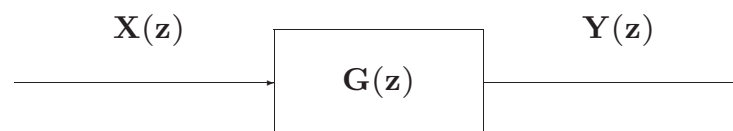
- I punti del piano s e del piano z, posti in corrispondenza per mezzo della relazione  $z = e^{sT}$ , possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate  $F(s)$  ed  $F(z)$ , con  $F(z)$  calcolata campionando  $F(s)$





**Lezione 8****Composizione di Schemi a Blocchi****Funzione di trasferimento discreta**

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$



$$\mathbf{X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = 1}$$

$$\mathbf{Y(z) = G(z)}$$

## Funzione di Risposta Armonica Discreta

$$\mathbf{G}(e^{j\omega T}), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$\mathbf{G}(e^{j(\omega+k\omega_s)T}) = \mathbf{G}(e^{j\omega T}), \quad \mathbf{G}(e^{j(-\omega)T}) = \mathbf{G}^*(e^{j\omega T})$$

- La risposta di un sistema  $\mathbf{G}(z)$  asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale  $\sin(\omega kT)$  di ampiezza unitaria è, a regime, una senoide  $\mathbf{A} \sin(\omega kT + \varphi)$  la cui ampiezza  $\mathbf{A}$  è data dal modulo del vettore  $\mathbf{G}(e^{j\omega T})$ , e la cui fase  $\varphi$  è data dalla fase del vettore  $\mathbf{G}(e^{j\omega T})$ :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{G}(e^{j\omega T})| \quad \varphi = \text{Arg}[\mathbf{G}(e^{j\omega T})]$$

- $$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1} \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{G}(z) \mathbf{X}(z) \\ &= \mathbf{Y}_0(z) + \frac{|\mathbf{G}(e^{j\omega T})|}{2j} \left( \frac{e^{j(\omega T + \varphi)} z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j(\omega T + \varphi)} z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \end{aligned}$$

somma di un termine transitorio  $\mathbf{Y}_0(z)$  che si annulla asintoticamente, corrispondente ai poli stabili di  $\mathbf{G}(z)$ , e un termine sinusoidale di ampiezza  $|\mathbf{G}(e^{j\omega T})|$  e fase  $\varphi = \text{Arg}[\mathbf{G}(e^{j\omega T})]$ .

**Lezione 9****Stabilità per Sistemi a Tempo Discreto**

---

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria  
v. Saragat, 1E, I-44122, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

**Stabilità dei sistemi discreti**

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Stabilità semplice
- Stabilità asintotica
- Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

---

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria  
v. Saragat, 1E, I-44122, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Il comportamento dinamico di un sistema

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dipende dai poli di  $G(z)$ , cioè dalle radici del polinomio  $A(z)$ .

- Esempio

$$G(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

in risposta a

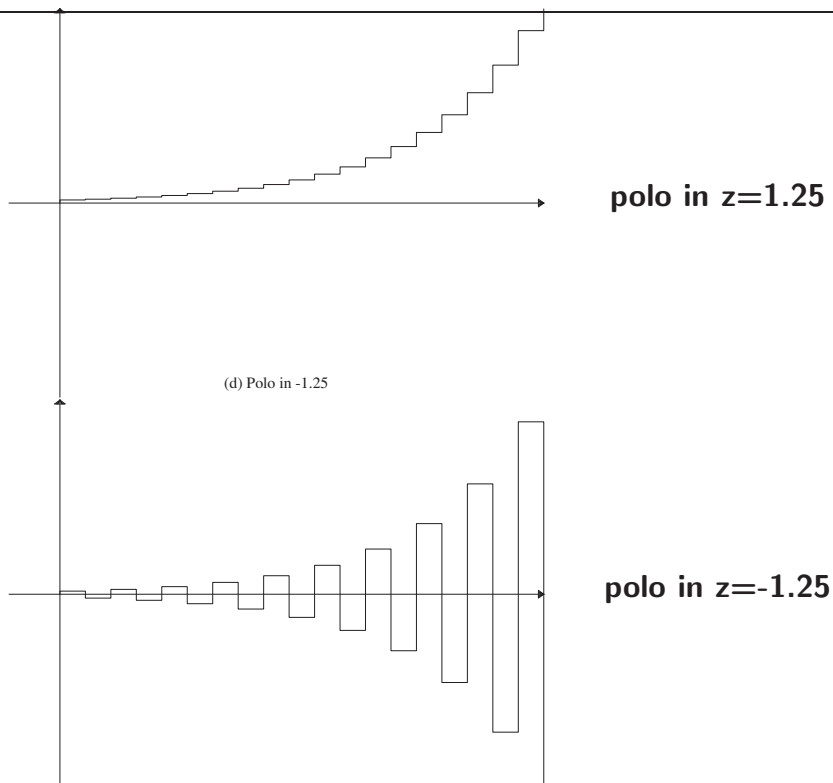
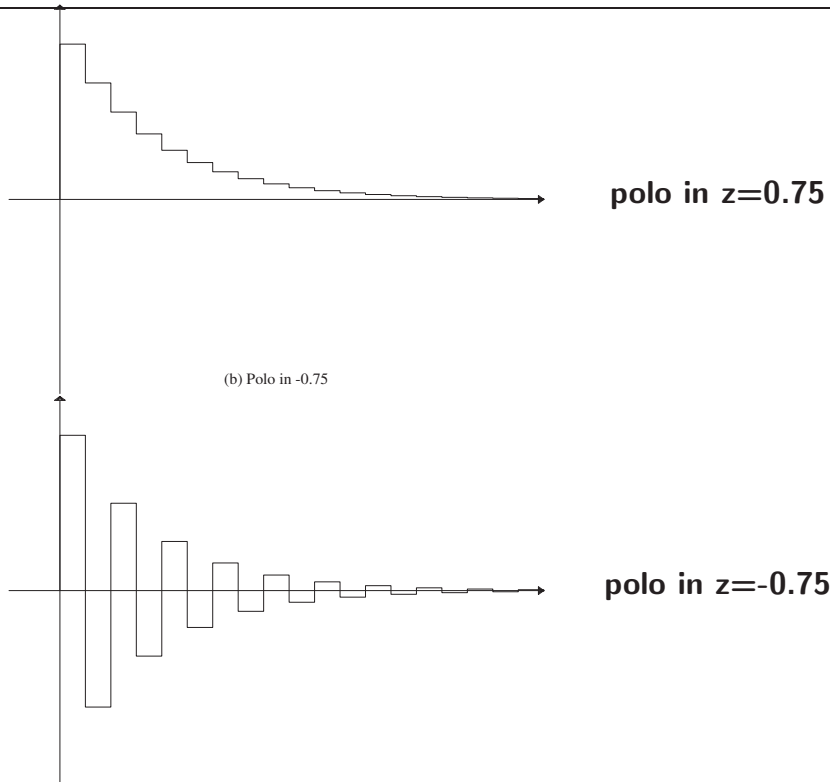
$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

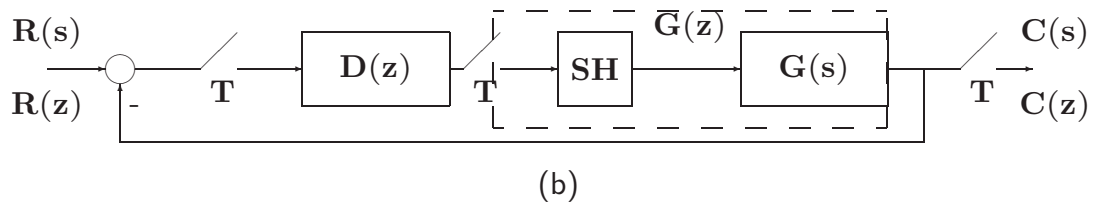
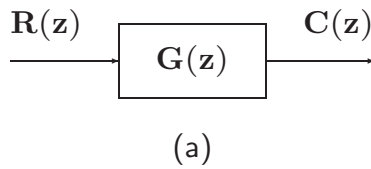
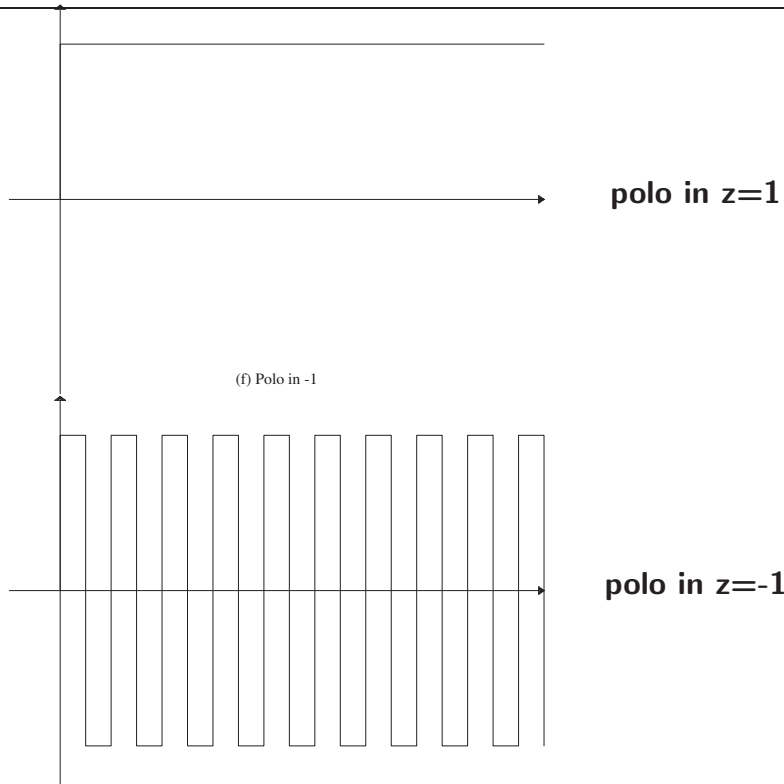
in corrispondenza ai valori  $a = 0.75$ ,  $a = -0.75$ ,  $a = 1.25$ ,  $a = -1.25$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$

$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 4u(0) = 4 \\ y(2) &= -ay(1) + 4u(1) = -4a \\ y(3) &= -ay(2) + 4u(2) = 4a^2 \\ y(4) &= -ay(3) + 4u(3) = -4a^3 \\ y(5) &= -ay(4) + 4u(4) = 4a^4 \\ &\dots \\ y(k) &= -ay(k-1) + 4u(k-1) = 4(-a)^{k-1} \end{aligned}$$





$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Sia dato un sistema descritto da

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{oppure} \quad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio  $A(z)$  (o del polinomio  $1 + D(z)G(z)$ ), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano  $z$  ossia  $|p_i| < 1, \forall i$ .
- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario  $|p_i| = 1$  sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.

## Lezione 10

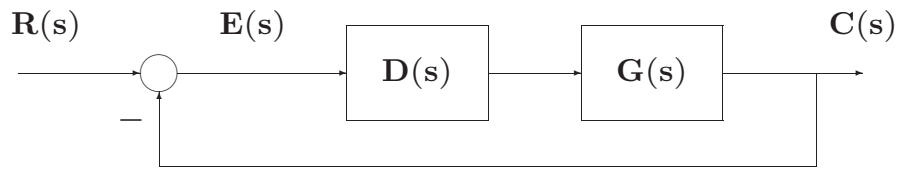
### Errori a Regime

- Specifiche di progetto di sistemi di controllo
- Specifiche che il sistema deve soddisfare, in condizioni **statiche** (o **di regime**) e durante i **transitori**:
  - **Precisione a regime**: ci si riferisce con questa alla capacità di un sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore
  - **Risposta nel transitorio**: ci si riferisce all'andamento per tempi finiti dell'uscita del sistema in retroazione in risposta a segnali tipici in ingresso

- **Stabilità relativa**: ci si riferisce ai margini di stabilità
- **Sensibilità parametrica**: ci si riferisce al fatto che le prestazioni del sistema non vengano alterate dalle variazioni di certi parametri
- **Reiezione di disturbi**: cioè la capacità del sistema controllato di ridurre al minimo l'influenza sull'uscita di eventuali disturbi che entrano nell'anello di controllo
- **Sforzo di controllo**: ci si riferisce all'ampiezza massima della variabile manipolabile  $v(t)$ , o sull'energia entrante nel sistema

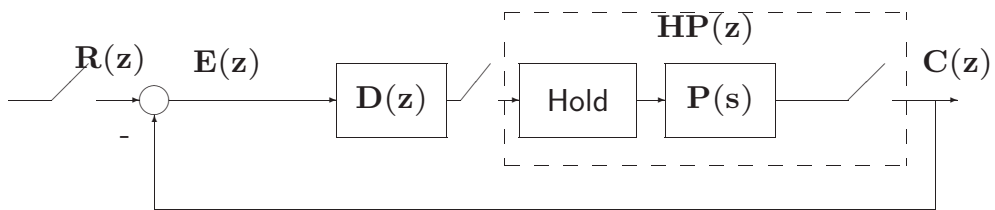


• Errori a regime (caso continuo)



$$G(s) = \frac{K(1 + q_1s)(1 + q_2s) \dots (1 + q_ms)}{s^N(1 + p_1s)(1 + p_2s) \dots (1 + p_ps)}$$

- Errori a regime (caso discreto)
- Nel caso discreto la corrispondente definizione di tipo si riferisce al numero di poli nel punto  $z = 1$



$$G(z) = D(z)HP(z) = D(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{P(s)}{s} \right]$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)}R(z)$$

- Assumendo che il sistema sia stabile, l'errore a regime può essere calcolato mediante il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned}
 e_{\text{reg}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})\mathbf{E}(z)] \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \mathbf{R}(z) \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \mathbf{R}(z) \right]
 \end{aligned}$$

- Errore di posizione

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(z) &= \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \\
 e_p &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \mathbf{G}(z)} \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{r_0}{1 + \mathbf{G}(z)} \right]
 \end{aligned}$$

- Definendo  $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} \mathbf{G}(z)$  **costante di posizione**

$$e_p = \frac{r_0}{1 + k_p}$$

- **Errore di velocità**

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned} e_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\mathbf{T}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})G(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo  $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{\mathbf{T}}$  **costante di velocità**

$$e_v = \frac{\mathbf{r}_0}{k_v}$$

- **Errore di accelerazione**

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1}(1 + z^{-1})\mathbf{r}_0}{2(1 - z^{-1})^3}$$

$$\begin{aligned} e_a &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1}(1+z^{-1})\mathbf{r}_0}{2(1-z^{-1})^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\mathbf{T}^2 \mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2 G(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo  $k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{\mathbf{T}^2}$  **costante di accelerazione**

$$e_a = \frac{\mathbf{r}_0}{k_a}$$

• Esempio

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

con  $T = 0.25$  s

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 2$$

$$e_p = \frac{1}{1+2} = 0.333$$

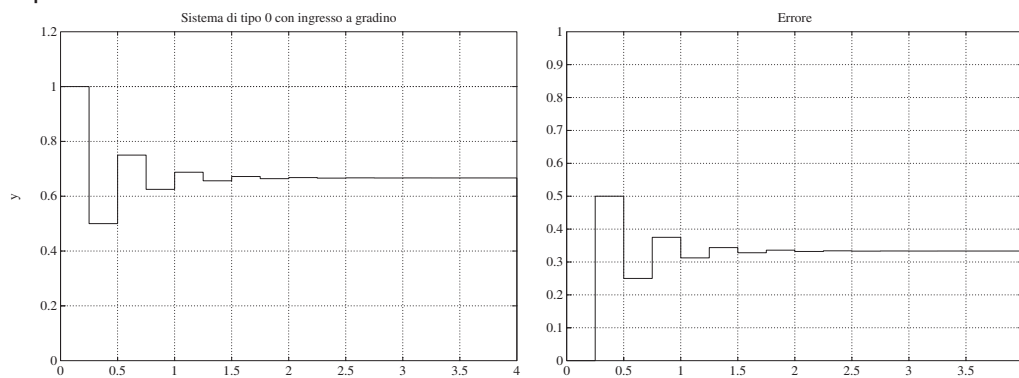
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = 0$$

$$e_v = \frac{1}{0} = \infty$$

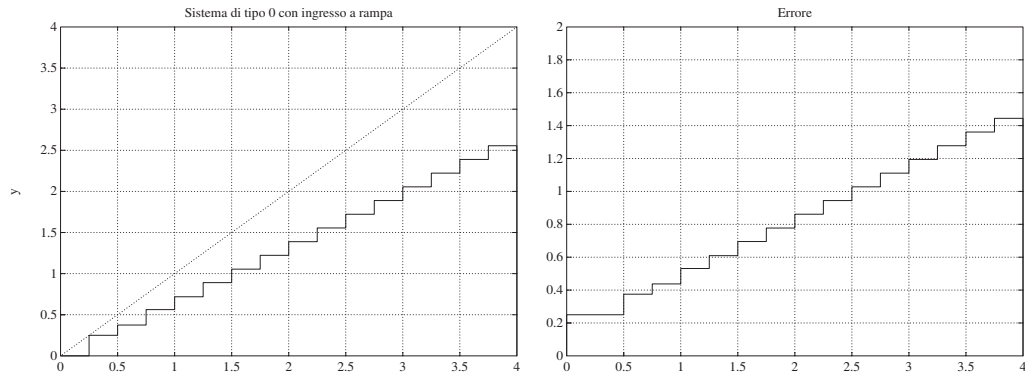
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0$$

$$e_a = \frac{1}{0} = \infty$$

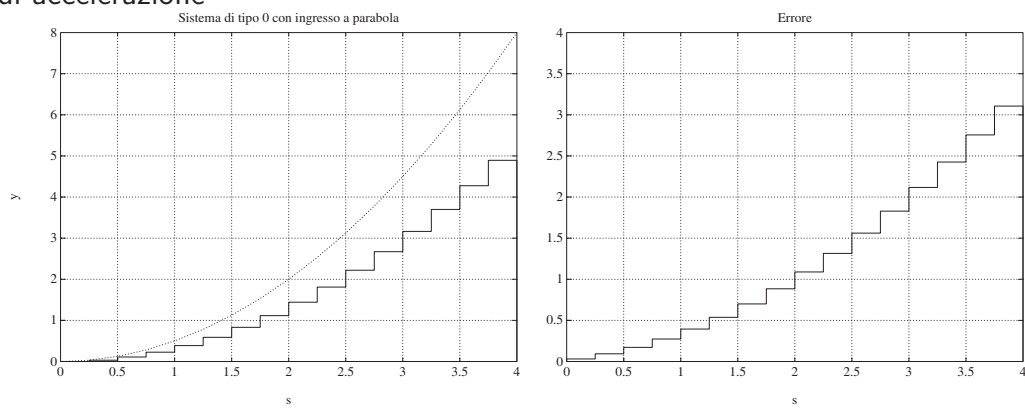
• Errore di posizione



● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



- Esempio

$$G(z) = \frac{0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{0.3z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

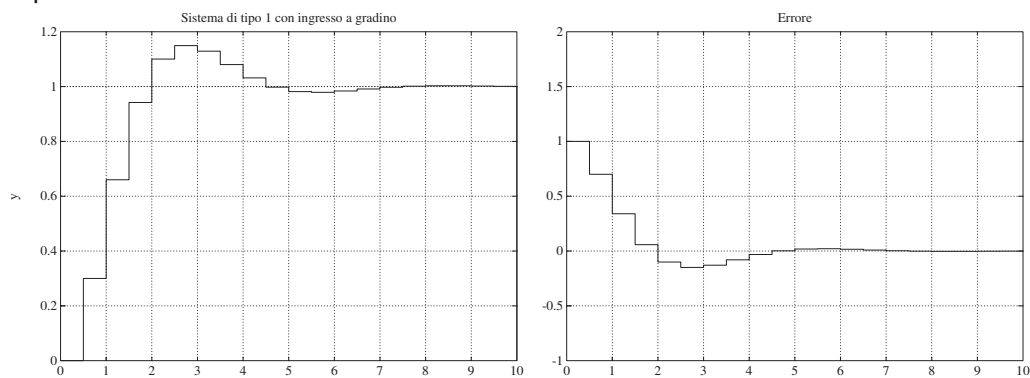
con  $T = 1$  s. Il sistema è ora di tipo 1

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \qquad e_p = 0$$

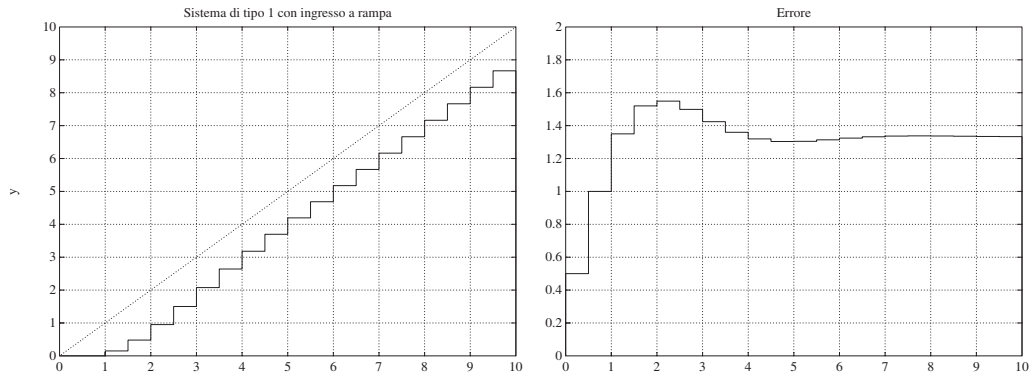
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = 0.75 \qquad e_v = 1.333$$

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0 \qquad e_a = \infty$$

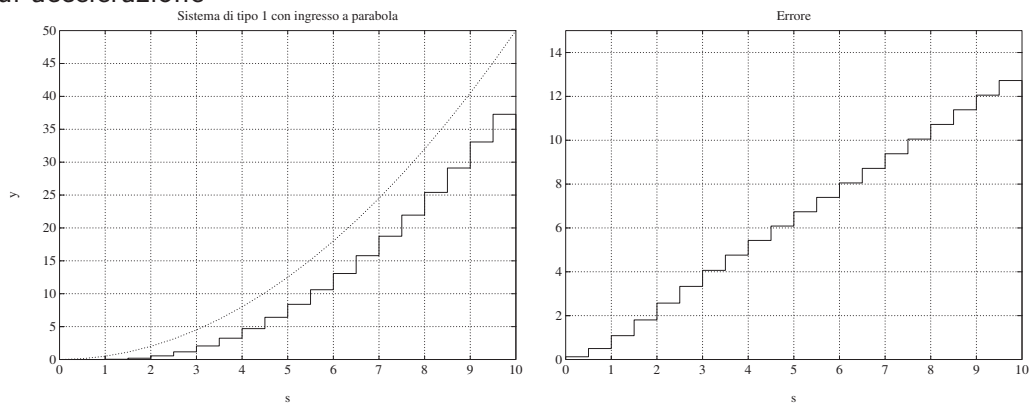
- Errore di posizione



● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



- Esempio

$$G(z) = \frac{0.3(1 - 1.2z^{-1} + 0.37z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6z^{-1})}$$

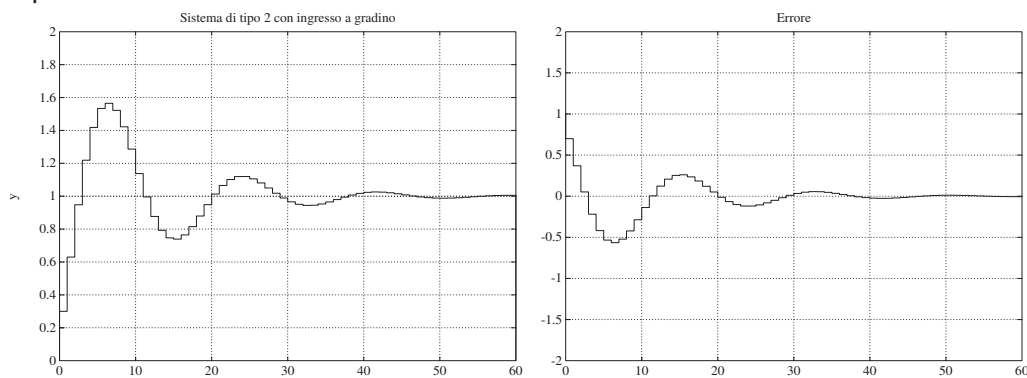
con  $T = 1$  s. Il sistema è di tipo 2

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \qquad e_p = 0$$

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T} = \infty \qquad e_v = 0$$

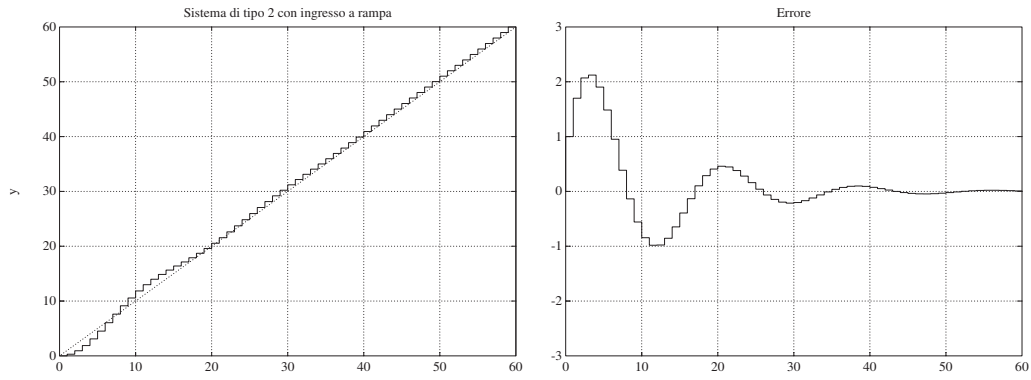
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0.1275 \qquad e_a = 7.843$$

- Errore di posizione

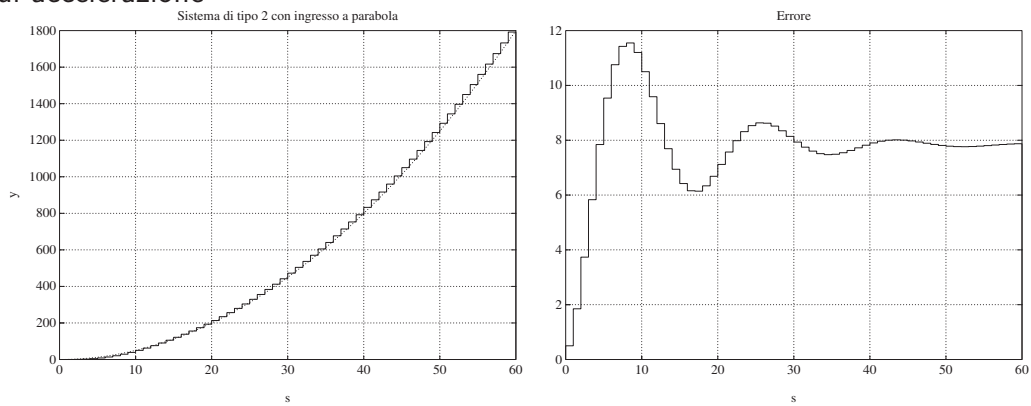




● Errore di velocità



● Errore di accelerazione



- Errori a regime in funzione del tipo di sistema

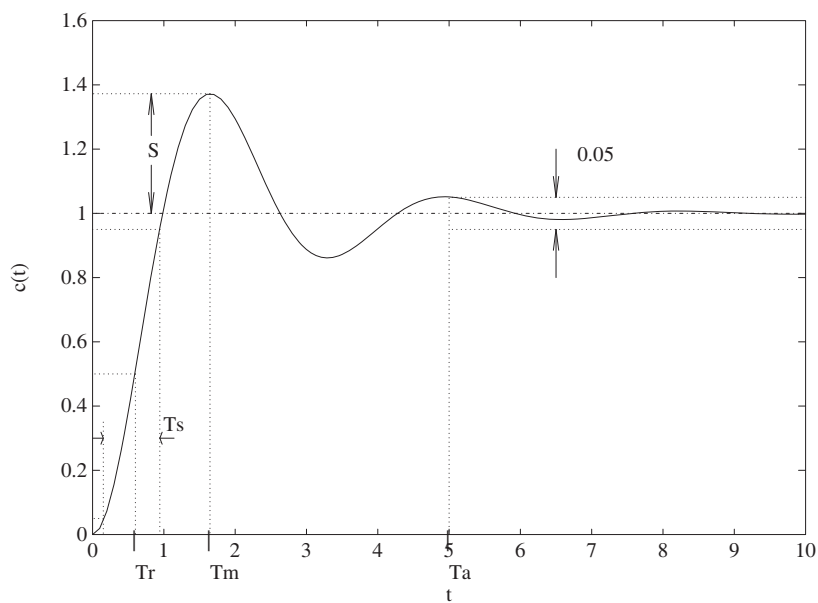
Tipo di sistema	Errore a regime in risposta a:		
	gradino	rampa	parabola
Tipo 0	$\frac{1}{1+k_p}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{1}{k_v}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{k_a}$

## Lezione 11

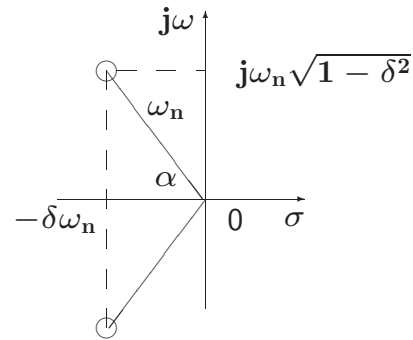
### Specifiche nel Transitorio: Specifiche Frequenziali

- Specifiche sul transitorio
- Nel caso tempo-continuo, si definiscono le seguenti caratteristiche temporali della risposta a gradino:
  - Tempo di salita  $T_s$
  - Tempo di assestamento  $T_a$
  - Tempo di ritardo  $T_r$
  - Massimo sorpasso o massima sovraelongazione  $S$
  - Istante di massima sovraelongazione  $T_m$

- Risposta di un sistema di secondo ordine



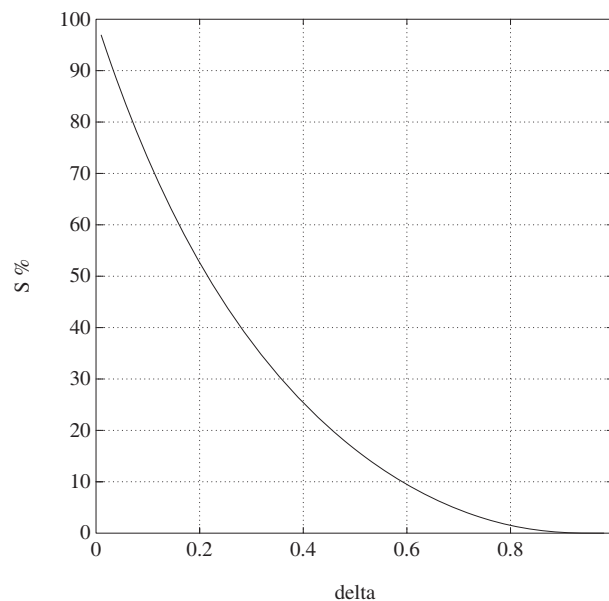
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



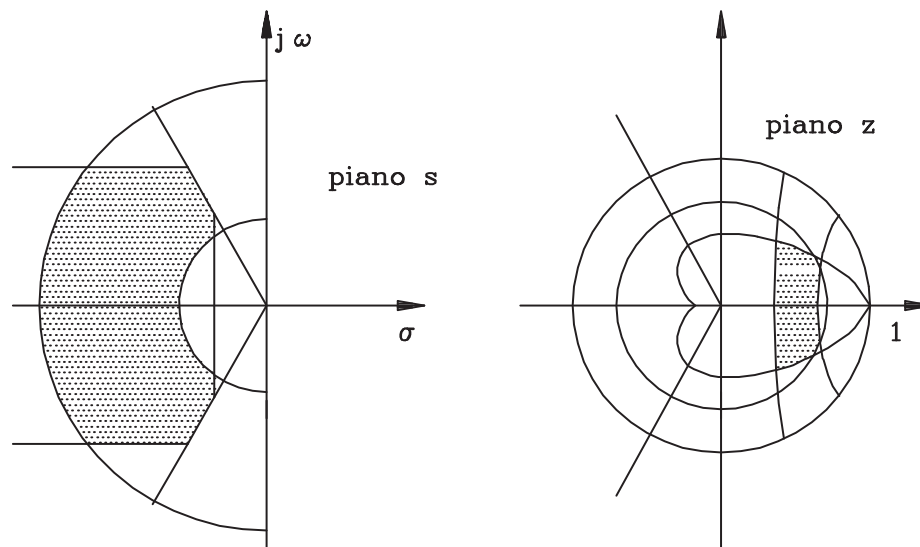
- Tempo da 0 al 100% del V.F.:  $T_1 = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Istante di massimo sorpasso:  $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Tempo di assestamento:  $T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$  (al 5 %),  $T_a = \frac{4}{\delta\omega_n}$  (al 2 %)

- Massimo sorpasso percentuale:

$$S = 100[c(T_m) - 1] = 100 e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$



- Posizione dei poli



- Specifiche frequenziali
- **Margine di fase**  $M_F$ : detto  $-\phi$  l'argomento di  $G(e^{j\omega T})$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega_0$  per la quale  $|G(e^{j\omega_0 T})| = 1$ , il margine di fase  $M_F$  è il complemento a  $\pi$  di  $\phi$ , cioè

$$M_F = \pi - \phi$$

Tipici valori di specifica sono  $45^\circ \div 60^\circ$

- **Margine di ampiezza**  $M_A$ : è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione  $\omega'$  a cui corrisponde la fase  $\pi$ :

$$M_A = \frac{1}{|G(e^{j\omega'T})|}$$

dove  $\arg\{G(e^{j\omega'T})\} = \pi$

Valori usuali di specifica per questo parametro sono 4-6 (12-16 db)

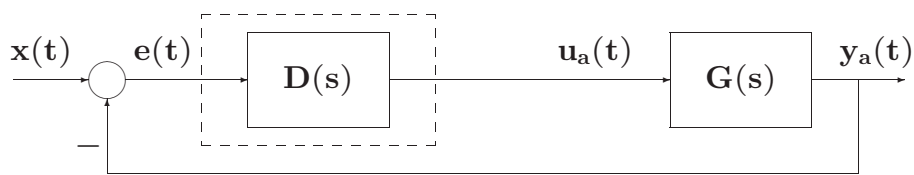
## Lezione 12

### Progetto per Discretizzazione del Controllore Analogico - I

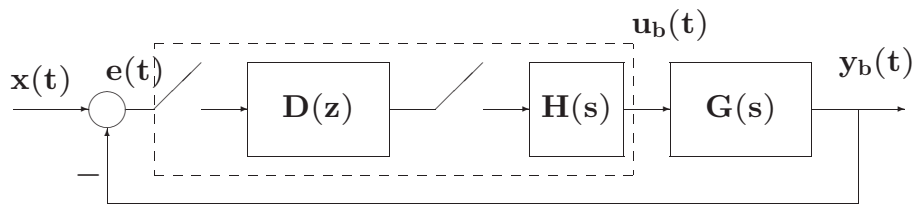
• **Tre classi di tecniche progettuali**

1. **Metodo indiretto** o per discretizzazione di un progetto analogico
2. **Metodo diretto** ossia nel dominio discreto:
  - progetto nel piano  $w$  (Bode)
  - progetto con il luogo delle radici
  - progetto con metodi analitici
3. Regolatori a struttura fissa (tipo PID)

• **Metodo indiretto**



(a)



(b)

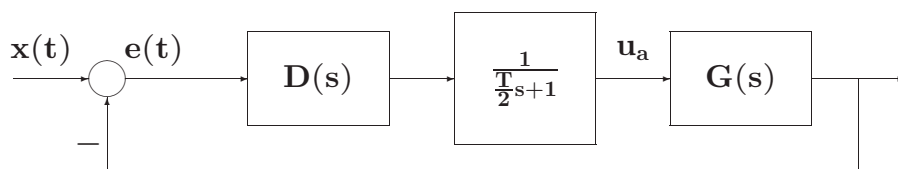
- **T** il più piccolo possibile !?

- Tre passi concettuali

1. Definizione di  $\mathbf{T}$  e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$\mathbf{H}_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{\mathbf{T}}{\frac{\mathbf{T}}{2}s + 1}$$

$$\mathbf{H}_0(s) \approx e^{-sT/2}$$



2. Discretizzazione della  $\mathbf{D}(s)$

3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico



## • Tecniche di discretizzazione:

1. Metodo delle differenze all'indietro (Eulero all'Indietro, EI)
2. Metodo delle differenze in avanti (Eulero in Avanti, EA)
3. Trasformazione bilineare (Tustin, TU)
4. Metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore di ordine 0

## • Metodo delle differenze all'indietro (EI)

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

- Esempio:  $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t)$

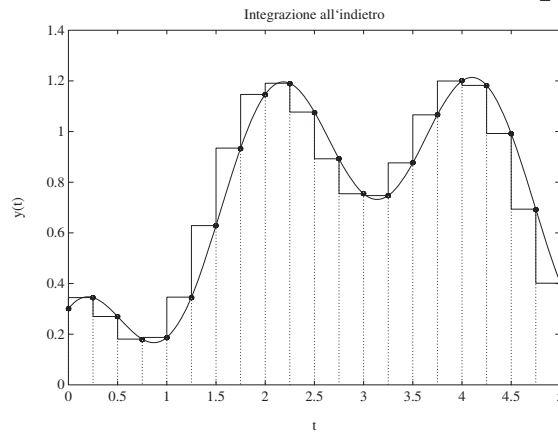
$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^t y(t) dt + a \int_0^t x(t) dt$$

calcolando per  $t = kT$ , per  $t = (k-1)T$  e sottraendo si ha

$$\begin{aligned} y(kT) - y((k-1)T) &= -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \\ &\quad + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \\ &\simeq -aT [y(kT) - x(kT)] \end{aligned}$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT [Y(z) - X(z)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$



## 2. Metodo delle differenze in avanti (EA)

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

- Esempio

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \approx Ty((k-1)T)$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \approx Tx((k-1)T)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT [y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$

### 3. Trasformazione bilineare (TU)

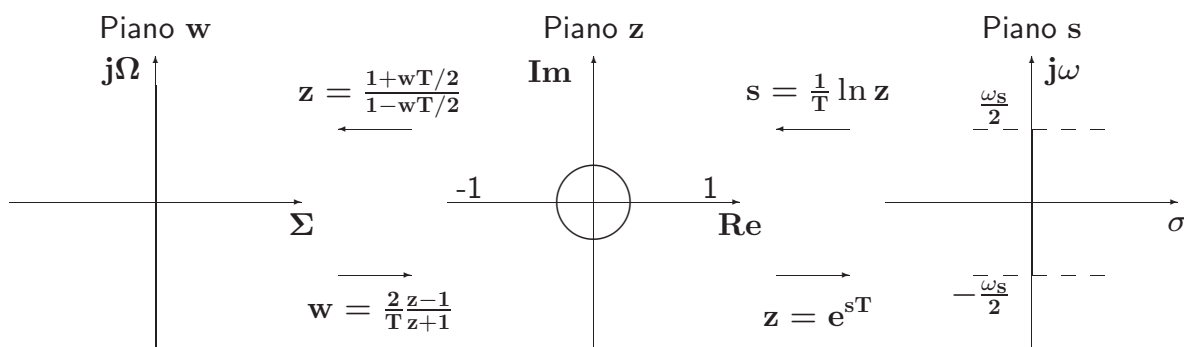
$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

- detta anche **integrazione trapezoidale** (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

- Relazione frequenziale tra il piano w, il piano z ed il piano s



## 5. Metodo della $\mathcal{Z}$ -trasformata

$$\mathbf{D}(z) = \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{D}(s)] \right]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da  $\mathbf{D}(s)$  stabili a  $\mathbf{D}(z)$  stabili

## Lezione 13

### Progetto per Discretizzazione del Controllore Analogico - II

6. **Metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore di ordine 0** o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \mathbf{D}(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \mathbf{D}(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT}$$

$$\mathbf{D}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{\mathbf{D}(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \mathbf{D}(s) \right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da  $\mathbf{D}(s)$  stabili a  $\mathbf{D}(z)$  stabili

## • Progetto nel piano $w$

- Uso dei diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols
- Definizione di regolatori con struttura molto semplice, tipicamente reti correttive a ritardo e/o anticipo
- Trasformazione bilineare

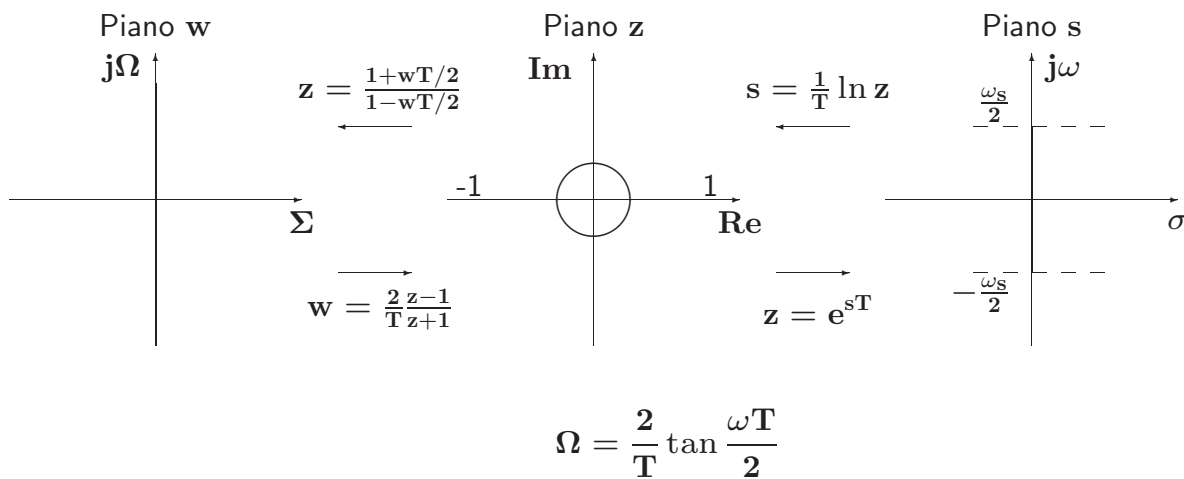
$$z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}$$

- Antitrasformazione nel piano  $z$  con

$$w = \frac{2z - 1}{Tz + 1} = \frac{2z - 1}{Tz + 1}$$

● I passi logici del progetto sono:

1. fissare un periodo di campionamento  $T$
2. ricavare la funzione di trasferimento  $G(z)$
3. trasformare la  $G(z)$  così ottenuta in una  $G(w)$
4. applicare, utilizzando la  $G(w)$ , una delle tecniche frequenziali note
5. antitrasformare la  $D(w)$  così ottenuta nella  $D(z)$
6. verificare le prestazioni ottenute



## • Uso dei diagrammi di Bode

- Si consideri per esempio il filtro passa basso

$$G_c(s) = \frac{100}{s + 100}$$

- Il corrispondente filtro discreto con  $T = 0.01$  s e con un ricostruttore di ordine 0 è dato da

$$\begin{aligned} G_d(z) &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{H}0\frac{100}{s+100}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{100}{s(s+100)}\right] \\ &= \frac{0.6321}{z-0.3679} \end{aligned}$$

- Passando al piano  $w$

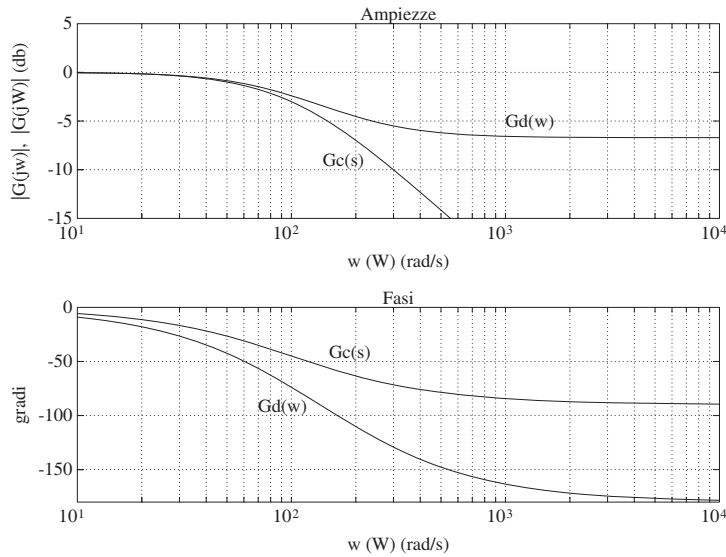
$$\begin{aligned} G_d(w) &= G_d(z)\Big|_{z=\frac{1+0.005w}{1-0.005w}} \\ &= -0.4621\frac{w-200}{w+92.4234} \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_c(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{100}{j\omega + 100} \right| = 1 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} |G_d(j\Omega)|$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_c(j\omega)| = 0 \neq \lim_{\Omega \rightarrow \infty} |G_d(j\Omega)| = 0.4621$$

- Il filtro  $G_d(w)$  presenta anche uno zero al finito in  $w = 2/T$



- Si noti che con la trasformazione bilineare possono essere introdotti zeri a parte reale positiva

- Progetto di regolatori

$$D(z) = \frac{k_d(z - z_0)}{z - z_p}$$

che vengono trasformati in

$$D(w) = \frac{1 + w\tau_0}{1 + w\tau_p}$$

- Si noti che  $D(z) = \frac{1+w\tau_0}{1+w\tau_p} \Big|_{w=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$

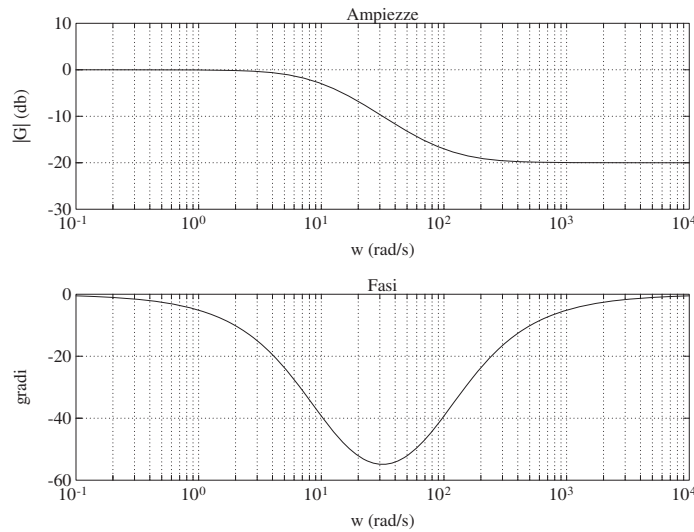
$$D(z) = \frac{T + 2\tau_0 z + \frac{T-2\tau_0}{T+2\tau_0}}{T + 2\tau_p z + \frac{T-2\tau_p}{T+2\tau_p}}$$

$$k_d = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p}, \quad z_0 = \frac{2\tau_0 - T}{2\tau_0 + T}, \quad z_p = \frac{2\tau_p - T}{2\tau_p + T}$$



- Progetto di rete ritardatrice

$$D(w) = \frac{1 + w\tau_0}{1 + w\tau_p} \quad \frac{1}{\tau_p} < \frac{1}{\tau_0}$$



- $\tau_0 = 0.01 \text{ s}$ ,  $\tau_p = 0.1 \text{ s}$

- Alle alte frequenze, il valore del guadagno è dato da

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\tau_p} < 1$$

- Lo sfasamento massimo (in ritardo) è dato da

$$\Phi_m = - \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e si ottiene per la pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0\tau_p}} = \frac{1}{\tau_p\sqrt{\alpha}}$$

- Attenuazione alle alte frequenze (effetto positivo), sfasamento in ritardo (effetto negativo)

## Lezione 14

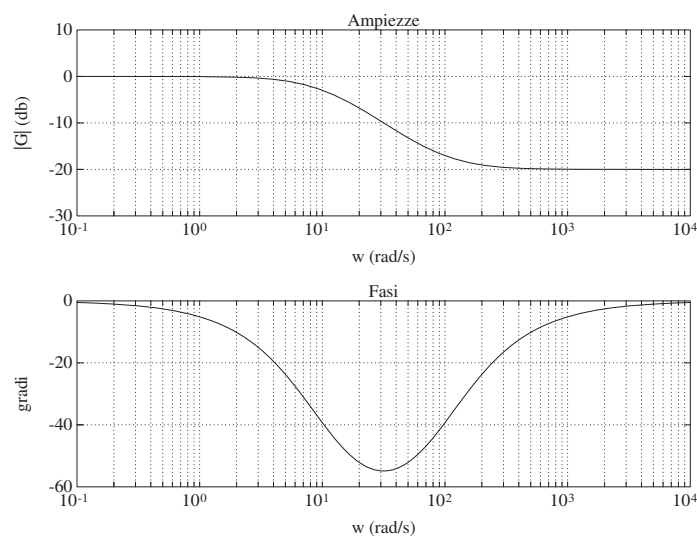
### Progetto di Reti Compensatrici - I

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria  
v. Saragat, 1E, I-44122, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Progetto di rete ritardatrice

$$D(w) = \frac{1 + w\tau_0}{1 + w\tau_p} \quad \frac{1}{\tau_p} < \frac{1}{\tau_0}$$



- $\tau_0 = 0.01$  s,  $\tau_p = 0.1$  s

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria  
v. Saragat, 1E, I-44122, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Il progetto si articola nei seguenti passi:

1. Dai diagrammi di Bode del sistema  $G(w)$ , con guadagno modificato per soddisfare eventuali specifiche sull'errore a regime, si calcola la pulsazione  $\Omega^*$  a cui corrisponde un margine di fase pari a quello desiderato ( $M_F$ ) aumentato di  $5^\circ$  per compensare le approssimazioni introdotte nel procedimento:

$$\Omega^* : \quad \text{Arg}[G(j\Omega^*)] = -180^\circ + M_F + 5^\circ$$

2. Poichè la rete deve far sì che a questa pulsazione il guadagno di anello diventi unitario, si impone che il fattore di attenuazione introdotto dalla rete corretrice sia

$$\frac{\tau_0}{\tau_p} = \alpha = \frac{1}{|G(j\Omega^*)|}$$

3. Si fissa

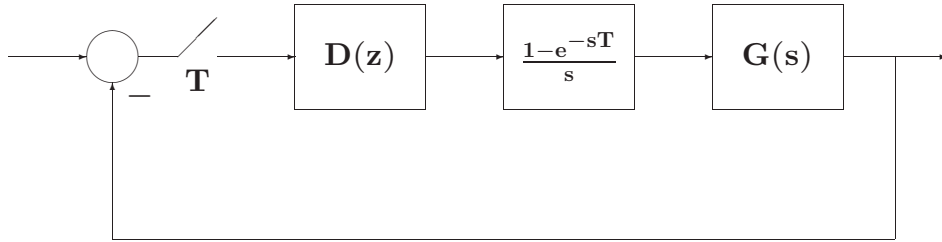
$$\frac{1}{\tau_0} = 0.1 \Omega^*$$

al fine di assicurarsi, come si è detto, che lo sfasamento in ritardo della rete non influisca in modo apprezzabile alla pulsazione di attraversamento

4. Si ricava

$$\tau_p = \frac{\tau_0}{\alpha}$$

● Esempio



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

- Progettare una rete digitale ritardatrice  $D(z)$  che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase  $M_F = 55^\circ$
- $T = 0.1$  s

- Effettuando la discretizzazione della  $G(s)$ , si ottiene

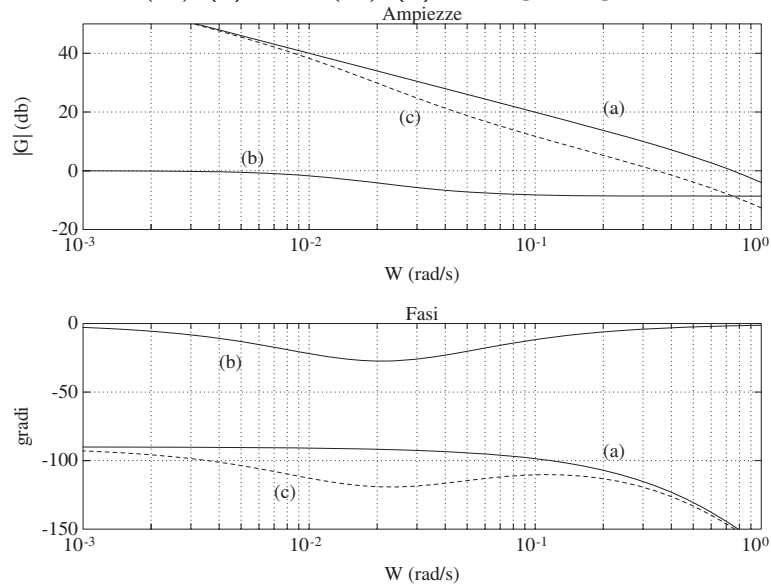
$$G(z) = \mathcal{Z} \left[ \mathbf{H0} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right]$$

$$= \frac{3.094 \cdot 10^{-4} (z+0.2484)(z+3.4651)}{(z-1)(z-0.9048)(z-0.8187)}$$

e applicando la trasformazione bilineare  $z = (1 + 0.05w)/(1 - 0.05w)$  si ha

$$G(w) = \frac{8.28 \cdot 10^{-5} (w - 20)(w + 33.22)(w - 36.23)}{w(w + 0.999)(w + 1.993)}$$

- Diagrammi di Bode di  $G(w)$  (a), di  $D(w)$  (b) e del guadagno di anello  $D(w)G(w)$  (c)



- La pulsazione cui corrisponde una fase di  $-180 + 55 + 5 = -120^\circ$  è  $\Omega^* \approx 0.3446$  rad/s a cui corrisponde un guadagno di

$$1/\alpha = 2.7039 = 8.64\text{db}$$

da cui

$$\tau_0 = \frac{1}{0.03446} = 29.0191$$

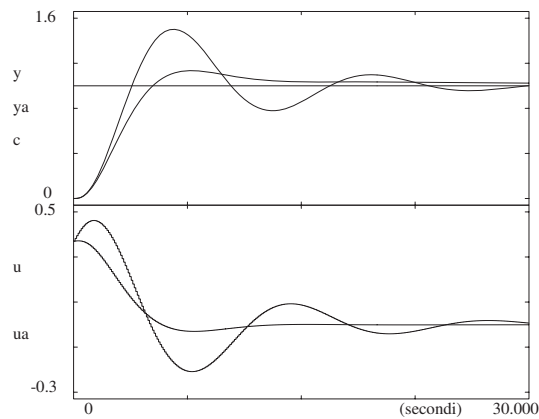
$$\tau_p = 2.7039 \cdot 29.0191 = 78.4649$$

$$\Omega_0 = 0.03446 \qquad \Omega_p = 0.01274$$

- Effettuando l'antitrasformata

$$D(z) = \frac{0.37(z - 0.99656)}{(z - 0.9987)} = \frac{0.37z - 0.369}{(z - 0.9987)}$$

- Risposta a gradino del processo in retroazione e relative variabili di controllo con e senza troncamento numerico a 3 cifre dei parametri del regolatore

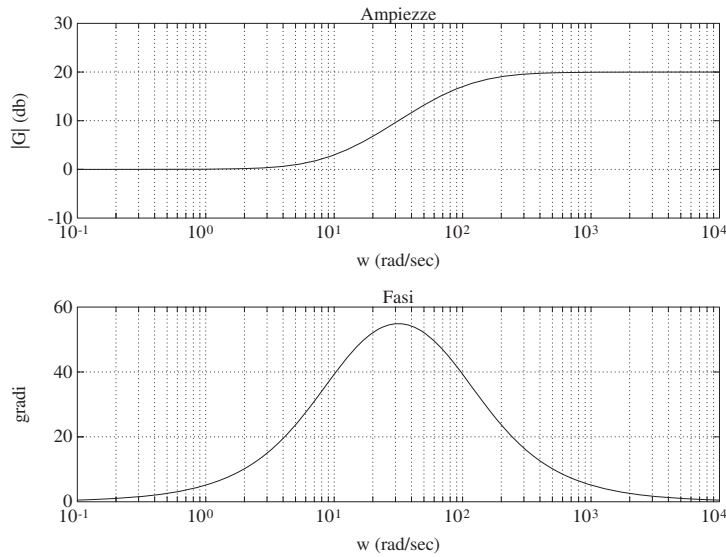


#### Note:

- Il polo e lo zero della rete ritardatrice sono molto prossimi tra loro ed entrambi nelle vicinanze del punto  $z = 1 + j0$
- Il fenomeno è peraltro accentuato per  $T$  piccolo
- Il regolatore digitale deve essere realizzato con una notevole precisione numerica

- Progetto di rete anticipatrice

$$D(w) = \frac{1 + w\tau_0}{1 + w\tau_p} \quad \frac{1}{\tau_0} < \frac{1}{\tau_p}$$



- $\tau_p = 0.01 \text{ s}$ ,  $\tau_0 = 0.1 \text{ s}$

- Il guadagno della rete per alte frequenze è

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\tau_0}{\tau_p} > 1$$

- Lo sfasamento massimo in anticipo è

$$\Phi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

ottenuto alla pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0\tau_p}} = \frac{1}{\tau_0\sqrt{\alpha}}$$

- Sfasamento in anticipo (effetto positivo), aumento di guadagno (effetto negativo)

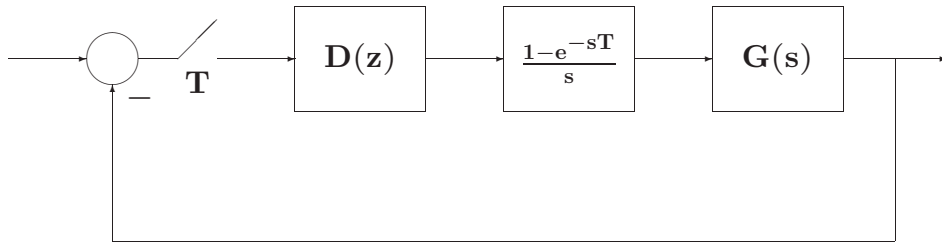
- Progetto con specifica di margine di fase  $M_F$ :
  1. Dai diagrammi di Bode della  $G(w)$ , nella quale si è considerato il guadagno opportuno per soddisfare le specifiche sull'errore a regime, si individua il margine di fase del sistema
  2. Si calcola l'anticipo di fase  $\Phi_m$  necessario per avere un margine di fase pari a quello  $M_F$  desiderato, maggiorato di  $5^\circ \div 10^\circ$  per compensare le approssimazioni di progetto
  3. Una volta noto  $\Phi_m$ , si calcola

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Phi_m}{1 + \sin \Phi_m}$$

4. Si determina la pulsazione  $\Omega^*$  per la quale l'ampiezza di  $G(w)$  vale  $\alpha/2$ . Poichè la rete aumenta il guadagno del sistema alle alte frequenze, si fa corrispondere la nuova pulsazione  $\Omega^*$  alla  $\Omega_m$  della rete anticipatrice
5. Dalle due relazioni
 
$$\alpha = \frac{\tau_p}{\tau_0}, \quad \Omega^* = \Omega_m = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$$
 si ricavano le due costanti di tempo  $\tau_0, \tau_p$
6. Se le prestazioni risultanti non sono quelle desiderate, si ripete il procedimento fissando  $\Phi_m$  ad un valore superiore. Può risultare conveniente considerare come valori di  $\Omega_m$  per la rete una pulsazione diversa (solitamente inferiore)



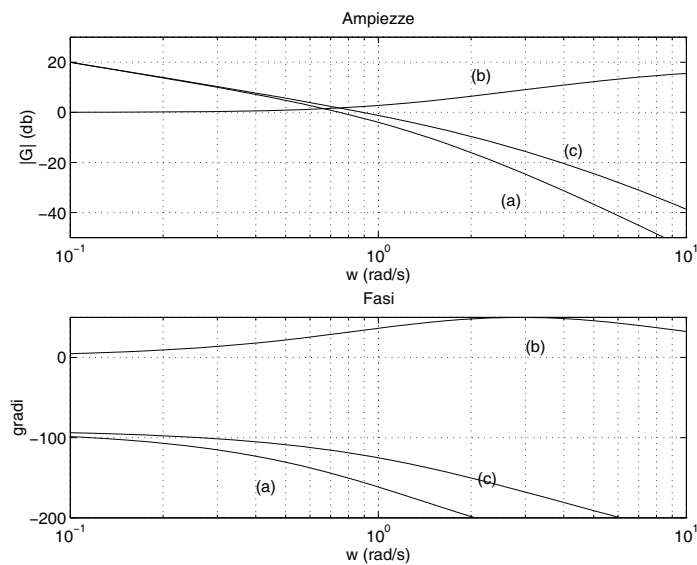
● Esempio



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

- Progettare una rete anticipatrice digitale  $D(z)$  che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase  $M_F = 55^\circ$
- $T = 0.1$  s

- Diagrammi di Bode di  $G(w)$  (a), di  $D(w)$  (b) e del guadagno di anello  $D(w)G(w)$  (c)



- Margine di fase pari a circa  $30^\circ$ , per una pulsazione di  $0.75$  rad/s

- Primo tentativo: si progetta una rete che introduce uno sfasamento  $\Phi_m = 35^\circ$ . Si ottiene

$$\alpha = 0.271, \quad \Omega^* = 2.16 \text{ rad/s}$$

$$\tau_p = 0.241 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.8893 \text{ s}$$

- Il margine di fase di  $D(w)G(w)$  è di  $49^\circ$
- Anche variando  $\Omega_m$  non si riesce ad ottenere la specifica di fase
- Si ricomincia con  $\Phi_m = 45^\circ$  e si ottiene

$$\alpha = 0.1715, \quad \Omega^* = 2.61 \text{ rad/s}$$

$$\tau_p = 0.1587 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.9252 \text{ s}$$

e un margine di fase complessivo di  $53^\circ$

- Ridefinendo  $\Omega^* = 2.2 \text{ rad/s}$  si ottiene

$$D(w) = \frac{1 + 1.0973w}{1 + 0.1883w}$$

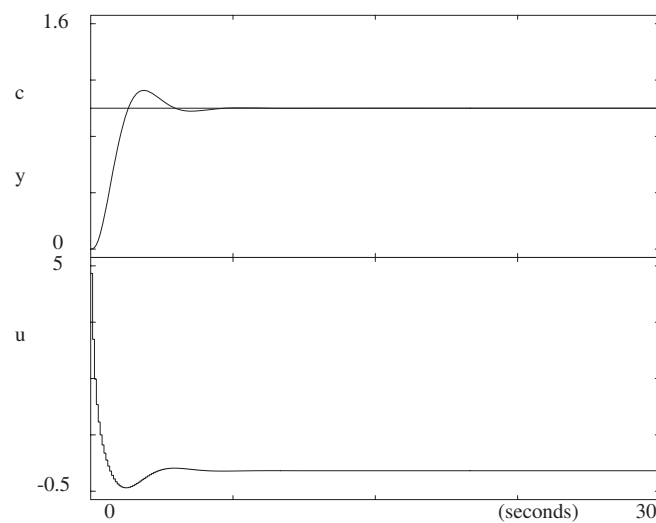
che fornisce il margine prescritto  $M_F = 55^\circ$

- Antitrasformando

$$D(z) = \frac{4.8146(z - 0.9129)}{z - 0.5803}$$

- Si nota che nel caso della rete anticipatrice non ci sono problemi numerici sulla precisione dei parametri

- Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo



- Progetto con specifica sul margine di fase:
  1. Si cerca la pulsazione  $\Omega^+$  per la quale il sistema non compensato presenta il margine di fase desiderato  $M_F$
  2. Si calcola l'attenuazione che occorre introdurre affinché  $\Omega^+$  diventi la pulsazione di attraversamento per il sistema compensato
  3. Si impone quindi

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega^+$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha \tau_1)} = \frac{1}{|G(j\Omega^+)|}$$

4. Il grado di libertà residuo viene fissato come prima sulla base di ulteriori specifiche

- Si pone

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega_m, \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)} = k$$

e si ricavano

$$\tau_2 = \frac{1}{\Omega_m} \sqrt{\frac{\alpha - \alpha^2 k}{k - \alpha}}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\Omega_m^2 \tau_2}$$

in funzione del terzo parametro  $\alpha$

## Lezione 15

### Progetto di Reti Compensatrici - I

## • Progetto mediante il luogo delle radici

- Equazione caratteristica del sistema in anello chiuso

$$1 + k G_0(z) = 0$$

- $k$  è il parametro di interesse che si fa variare tra  $0$  e  $+\infty$
- Solitamente  $k$  rappresenta il guadagno

### Progetto 1

- Nell'anello digitale sia

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s + 0.1)}$$

con  $T = 1$  s. Per cui

$$G(z) = 0.0484 \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

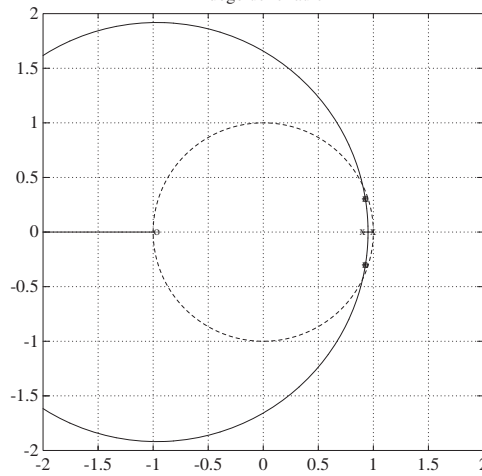
Le specifiche di progetto sul sistema in catena chiusa sono:

$$S\% \leq 16, \quad T_a \leq 6 \text{ s}, \quad k_v = 1$$

- Dalla specifica sul sorpasso si ha  $\delta = 0.5$ . Assumendo  $D(z) = k$ , l'equazione caratteristica diventa

$$1 + 0.0484k \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)} = 0$$

Luogo delle radici



- Nel caso tempo continuo, le specifiche su  $S\%$  e  $T_a$  implicano che la coppia di poli dominanti del sistema in anello chiuso sia

$$s = -0.5 \pm j0.867 \quad (\delta = 0.5, \omega_n = 1)$$

e nel caso tempo discreto effettuando la trasformazione  $z = e^{sT}$

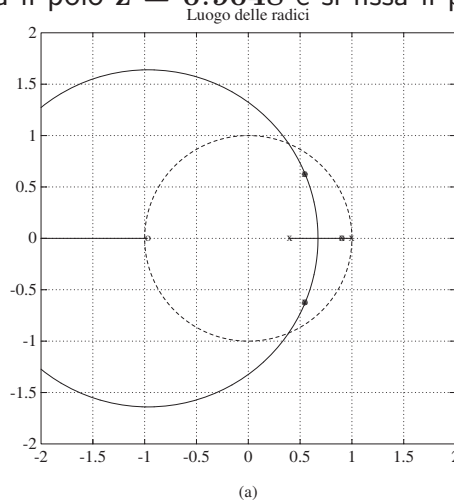
$$z = 0.393 \pm j0.462$$

- Nel piano  $z$  i poli del sistema in retroazione devono essere:
  - interni al cerchio di raggio  $r = e^{-\delta\omega_n} = 0.6065$
  - entro la zona delimitata dal luogo a spirale logaritmica per  $\delta = 0.5$
- Non sono soddisfatte le specifiche su  $S\%$  e su  $T_a$
- Per  $K > 2$  il sistema è instabile

- Si introduce un regolatore dinamico

$$D(z) = k \frac{z - z_0}{z - z_p}$$

- Primo tentativo:  $z_0$  cancella il polo  $z = 0.9048$  e si fissa il polo del regolatore a sinistra, per esempio  $z_p = 0.4$



- I poli si posizionano in

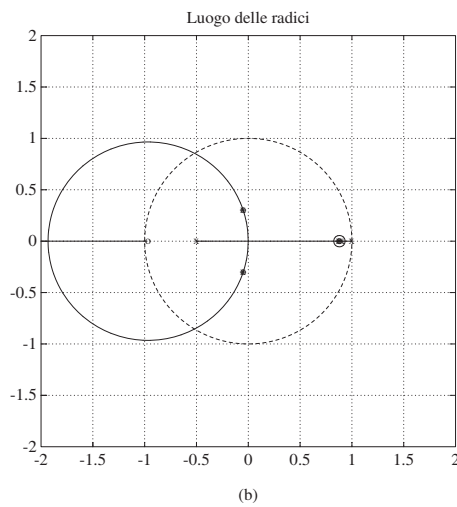
$$z = 0.5476 \pm j0.6284$$

per cui  $\delta = 0.21$  e quindi non è soddisfatta la specifica sul transitorio

- Nuovo tentativo:

$$z_0 = 0.88$$

in modo che in questa zona lo sviluppo del luogo delle radici all'esterno dell'asse reale sia modesto, e il polo in  $z = -0.5$



- Se si sceglie  $k = 13$  per cui

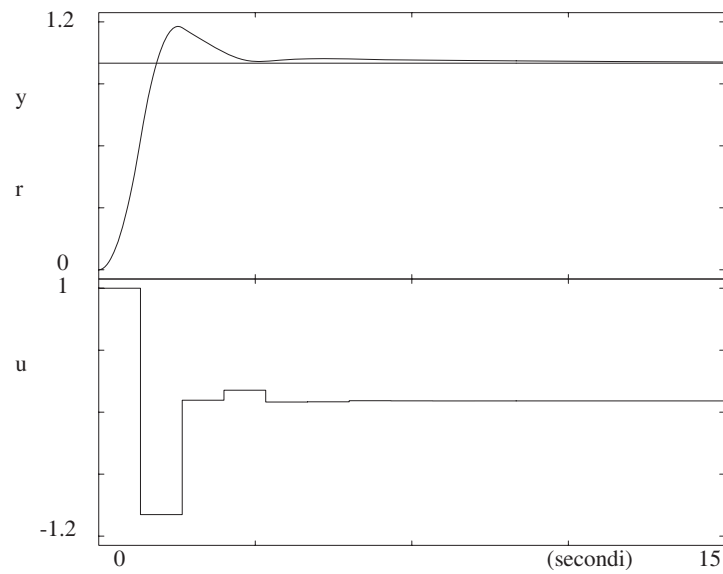
$$z = -0.04986 \pm j0.3035, \quad z = 0.8757$$

- Il regolatore finale è

$$D(z) = 13 \frac{z - 0.88}{z + 0.5}$$



- Verifica simulativa



## Lezione 16

### Regolatori Standard PID Digitali - I

## Regolatori standard

- Struttura fissa tipo PID
- Tuning dei parametri
- Scelta del periodo di campionamento  $T$
- Discretizzazione algoritmi analogici ed inoltre . . .
- Tuning automatico dei parametri

### Discretizzazione del classico regolatore PID analogico

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$

- Usando l'integrazione rettangolare
  - Forma di posizione:

$$u_n = K_p \left[ e_n + \frac{T}{T_i} \sum_{k=0}^n e_k + \frac{T_d}{T} (e_n - e_{n-1}) \right] + M_R$$

- Forma di velocità:

$$\Delta u_n = K_p \left[ e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_i} e_n + \frac{T_d}{T} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]$$

- Una forma di algoritmo particolarmente utilizzata in pratica
- Termine derivativo:

$$\frac{T_d s}{1 + T_d s/N} \quad N \text{ tra } 3 \text{ e } 10$$

- Parte integrale: “differenza in avanti”
- Parte derivativa: “differenza all’indietro”

$$D_{PID}(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T+T_d/N} \frac{z-1}{z-T_d/(NT+T_d)} \right]$$

### Tuning dei parametri

- Due categorie di criteri
  - a) Quelli che utilizzano alcuni punti caratteristici della risposta  $y(t)$  per imporre l’andamento transitorio desiderato.
  - b) Criteri di tipo integrale

$$ISE = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt$$

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

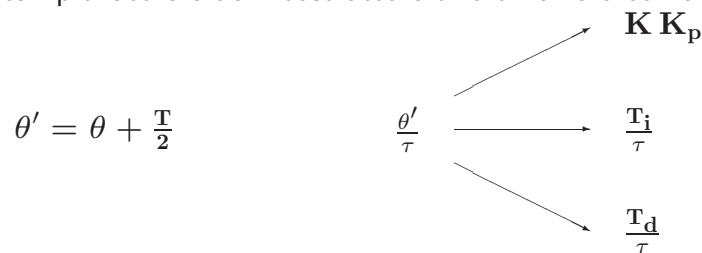
● Nel caso analogico

Controllore	Ziegler-Nichols	Cohen-Coon	3C
<i>P</i>	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1}$	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1} + 0.333$	$K K_p = 1.208(\theta/\tau)^{-0.956}$
<i>PI</i>	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 3.33(\theta/\tau)$	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1} + 0.082$ $T_i/\tau = \frac{3.33(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/11]}{1+2.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 0.928(\theta/\tau)^{-0.946}$ $T_i/\tau = 0.928(\theta/\tau)^{0.583}$
<i>PID</i>	$K K_p = 1.2(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 2(\theta/\tau)$ $T_d/\tau = 0.5(\theta/\tau)$	$K K_p = 1.35(\theta/\tau)^{-1} + 0.27$ $T_i/\tau = \frac{2.5(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/5]}{1+0.6(\theta/\tau)}$ $T_d/\tau = \frac{0.37(\theta/\tau)}{1+0.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 1.37(\theta/\tau)^{-0.95}$ $T_i/\tau = 0.74(\theta/\tau)^{0.738}$ $T_d/\tau = 0.365(\theta/\tau)^{0.95}$

● Modello del sistema

$$G_p(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

● Approssimazione del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo pari a  $T/2$



e quindi si ricavano  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$

- Esempio. Sistema da controllare:

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

- Modello ( $K = 1$ ,  $\theta = 1.46$  s,  $\tau = 3.34$  s)

$$G_m(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s}$$

- Progettare un regolatore PID in corrispondenza a  $\delta = 0.25$
- Sia  $T = 0.3$  s

- $\theta' = \theta + T/2 = 1.46 + 0.15 = 1.61$
- $\theta'/\tau = 0.482$
- Dalla tabella di Ziegler-Nichols si ha

$$K K_p = 2.4894 \quad \frac{T_i}{\tau} = 0.9641 \quad \frac{T_d}{\tau} = 0.241$$

da cui si ottengono i parametri

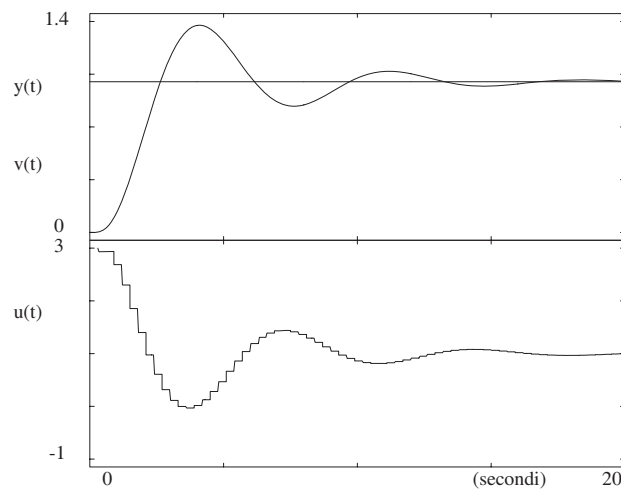
$$K_p = 2.4894$$

$$T_i = 0.9641\tau = 3.22$$

$$T_d = 0.241\tau = 0.805$$

- Mediante discretizzazione rettangolare

$$D_{PID}(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1}) \right]$$

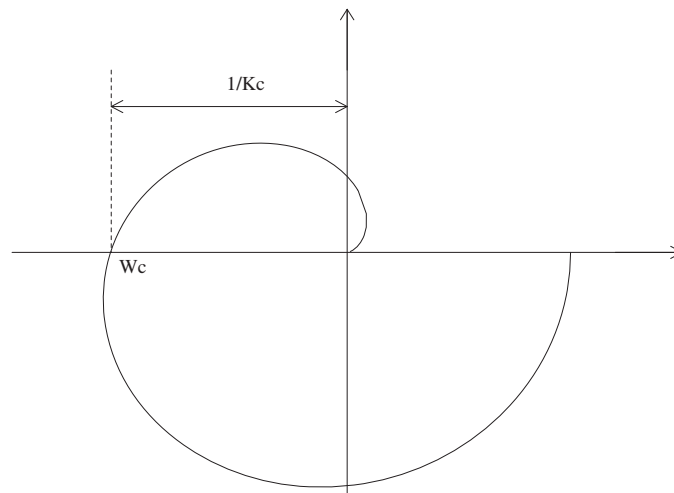


## Lezione 17

### Regolatori Standard PID Digitali - II

## • Tuning automatico

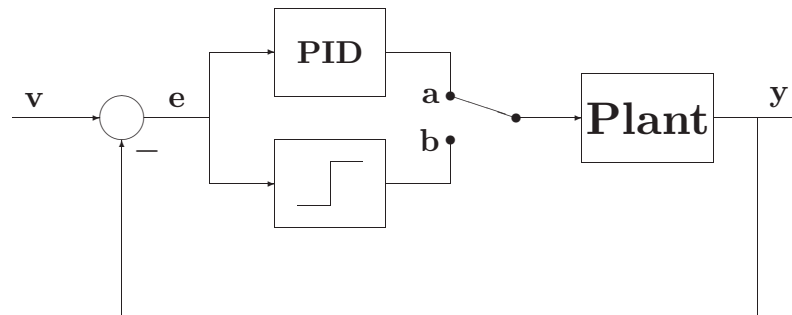
- Un semplice metodo è quello basato sulla stima del guadagno critico  $K_c$  e del periodo di oscillazione critica  $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$



- Stimati  $K_c$  e  $P_c$ , si usa la tabella di Ziegler–Nichols

Tipo	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5K_c$	$\infty$	<b>0</b>
<b>PI</b>	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	<b>0</b>
<b>PID</b>	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$

- Schema per il tuning automatico



- Dalla teoria della funzione descrittiva, segue

$$K_c = \frac{4d}{\pi A}$$

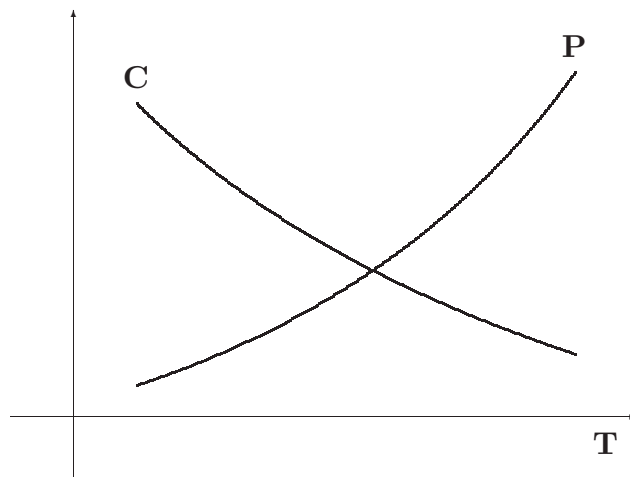
con  $d$  ampiezza della funzione a relè, e  $A$  ampiezza dell'uscita sinusoidale  $y$

## Lezione 18

### Considerazioni conclusive



- **Considerazioni riassuntive sulla scelta del periodo di campionamento**



- C: Costo
- P: Prestazione
- T: Tempo di campionamento

- **Prestazioni**
  - reiezione dei disturbi
  - inseguimento del set-point
  - energia di controllo
  - ritardi e stabilità
  - robustezza alle variazioni parametriche
- **Costo**
  - sfruttamento della capacità elaborativa
  - velocità di conversione
  - velocità di elaborazione
  - precisione nella memorizzazione dei parametri e delle variabili

- Gli effetti di  $T$  sulle prestazioni
  - gli effetti di destabilizzazione crescono al crescere di  $T$ ;
  - la perdita di informazione sui segnali cresce al crescere di  $T$ ;
  - l'accuratezza dell'algoritmo, ottenuto per discretizzazione, cresce al diminuire di  $T$ ;
  - gli effetti di quantizzazione crescono al diminuire di  $T$ .
- La miglior scelta è il valore di  $T$  più elevato che garantisca tutte le specifiche prestazionali fissate

- Regole pratiche per la scelta di  $T$ :

a)

$$T \leq \frac{\tau_{\text{dom}}}{10}$$

b)

$$T \ll \frac{T_a}{10} \rightarrow T = \frac{T_a}{100}$$

- Modello di un processo di tipo 0:

$$G_{01}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

con  $k, \theta, \tau$  da determinare.

- Modelli più complessi. Con due poli reali:

$$G_{02}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

- Con due poli complessi coniugati:

$$G_{03}(s) = k \frac{e^{-\theta s} \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Con due poli ed uno zero:

$$G_{04}(s) = k \frac{e^{-\theta s} (1 + s/\alpha)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

- Modello del primo ordine:

$$G_{01}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

