

## Capitolo 4

# Osservatori e retroazione uscita-stato-ingresso

In questo capitolo verranno richiamate le problematiche relative ai sistemi dinamici lineari a tempo continuo riguardanti l'assegnabilità degli autovalori, la retroazione algebrica dell'uscita, il progetto di un osservatore identità per la stima dello stato e la retroazione stato stimato-ingresso realizzata mediante osservatore.

In relazione ai sistemi del secondo ordine, saranno utilizzati i parametri che caratterizzano la risposta del sistema stesso ad un gradino (massima sovraelongazione  $S$ , tempo di assestamento  $T_a$  ed errore a regime) in relazione alla posizione dei poli nel piano complesso.

Verrà infine presentata una funzione *Matlab* che permette di assegnare arbitrariamente gli autovalori di un sistema.

### 4.1 Assegnabilità degli autovalori e retroazione dello stato

Si consideri il sistema dinamico lineare e stazionario nella forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

in cui  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^r$  e  $y(t) \in \mathfrak{R}^m$ . Se lo stato è accessibile si realizzi una retroazione algebrica dello stato attraverso l'equazione  $u(t) = -Hx(t) + v(t)$ , con  $H_{r \times n}$ , da cui ottenere il sistema

$$\dot{x}(t) = (A - BH)x(t) + Bv(t) \tag{4.2}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Si può dimostrare che gli autovalori di  $(A - BH)$  sono posizionabili arbitrariamente in funzione della matrice di retroazione  $H$  se e solo se il sistema  $(A, B, C)$  è completamente raggiungibile e controllabile. Lo schema a blocchi della retroazione è rappresentato nella Figura 4.1

In *Matlab* è possibile effettuare l'operazione di assegnamento degli autovalori in maniera automatica attraverso la funzione `place`. L'istruzione `H = PLACE(A,B,P)` calcola la matrice di retroazione dello stato  $H$  in modo tale che gli autovalori di  $(A - BH)$  siano quelli specificati nel vettore  $P$ . Gli autovalori non devono avere molteplicità maggiore del numero degli ingressi. Attraverso gli ulteriori parametri d'uscita `[H,PREC,MESSAGE] = PLACE(A,B,P)` viene restituita in `PREC` una stima di quanto gli autovalori sono stati assegnati vicino a quelli specificati (l'accuratezza è espressa in cifre decimali). `MESSAGE` contiene un messaggio di *warning* se qualche autovalore risulta lontano più del 10% rispetto alla posizione desiderata.

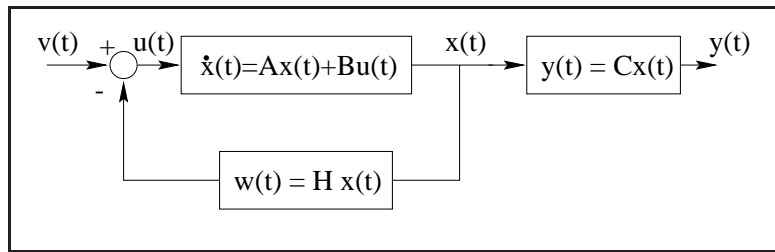


Figura 4.1: Schema a blocchi del sistema in retroazione ingresso-stato

## 4.2 Retroazione algebrica dell'uscita

Il sistema continuo dinamico lineare stazionario

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.3)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

con una retroazione algebrica dell'uscita nella forma  $u(t) = -Ky(t) + v(t)$  si modifica in

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) + Bv(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

come illustrato nella Figura 4.2.

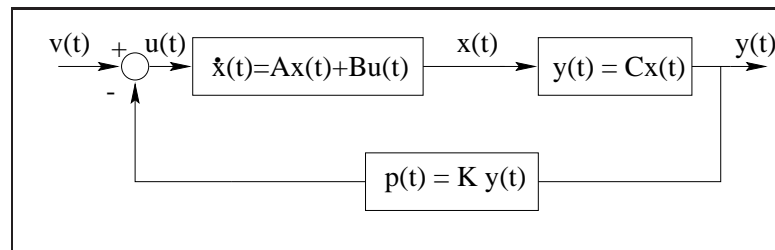


Figura 4.2: Schema a blocchi del sistema in retroazione uscita-ingresso

## 4.3 Luogo delle radici

Per un sistema SISO, la funzione `RLOCUS(SYS)` calcola e grafica il luogo delle radici relativo all'equazione

$$H(s) = D(s) + KN(s) = 0 \quad (4.5)$$

per un insieme di valori del guadagno  $K$  tale da assicurare un grafico sufficientemente regolare. Il sistema `SYS` è ottenuto utilizzando la funzione `Matlab ss`, tale che `SYS = ss(A,B,C,D)` oppure `SYS = tf(N,D)` con `N` e `D` contenenti i coefficienti dei polinomi in  $s$  del numeratore  $N(s)$  e denominatore  $D(s)$  della funzione di trasferimento  $C(sI - A)^{-1}B + D$ .

`[R,K] = rlocus(SYS,K)` restituisce in `R` le posizioni nel piano complesso degli autovalori ottenute specificando il valore del guadagno  $K$ .

La funzione `rlocfind` determina il guadagno relativo al luogo delle radici per un insieme prefissato di autovalori. L'istruzione `[K,POLES] = rlocfind(SYS)` apre una finestra grafica che permette di

selezionare in maniera interattiva col mouse il guadagno relativo ad una collocazione di poli, basandosi sul luogo delle radici prodotto dalla funzione `rlocus`. Il guadagno che produce quel posizionamento dei poli viene restituito col parametro `K` e i corrispondenti poli, nel vettore `POLES`.

## 4.4 Osservatore identità

L'osservatore identità per un sistema nella forma 4.1 risulta

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t)). \quad (4.6)$$

Se si definisce l'errore di stima  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  si ha che la dinamica di  $e(t)$  risulta descritta dalla relazione

$$e(t) = e^{(A-KC)t}e(0). \quad (4.7)$$

Si può dimostrare che l'osservatore ha dinamica arbitraria se il sistema di partenza è completamente osservabile e ricostruibile. Lo schema dell'osservatore è illustrato in Figura 4.3

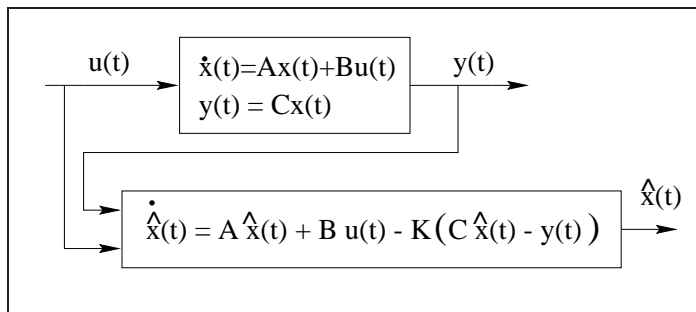


Figura 4.3: Schema a blocchi dell'osservatore identità

## 4.5 Retroazione stato stimato-ingresso

In riferimento allo schema a blocchi di Figura 4.4

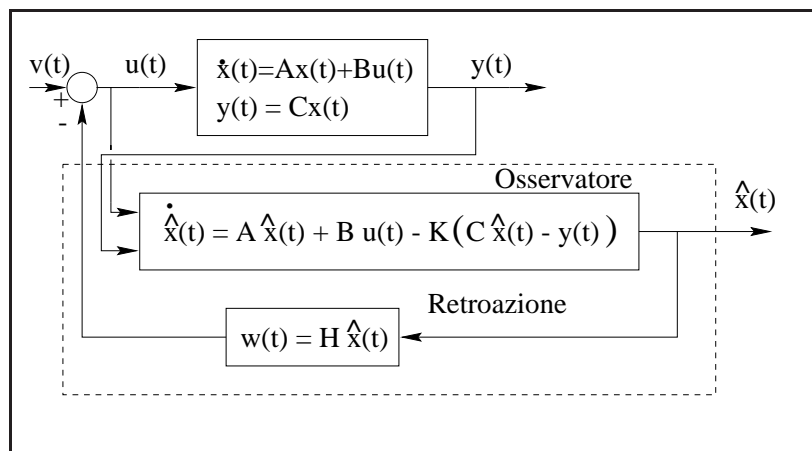


Figura 4.4: Schema a blocchi della retroazione dello stato stimato.

utilizzando le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BH\hat{x}(t) + Bv(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= (A - KC)\hat{x}(t) + Bv(t) - BH\hat{x}(t) + KCx(t)\end{aligned}$$

da cui, dalla definizione dell'errore di stima

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BH)x(t) - BHe(t) + Bv(t) \\ \dot{e}(t) &= (A - KC)e(t).\end{aligned}$$

Considerando il sistema di ordine  $2n$  avente vettore di stato  $\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$ , risulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BH & -BH \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t). \quad (4.8)$$

Dalla forma della matrice di stato del sistema di ordine  $2n$  risulta evidente il “principio di separazione degli autovalori”.

## 4.6 Parametri caratteristici di sistemi del secondo ordine

Dato il sistema del secondo ordine nella forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.9)$$

nelle ipotesi per cui  $0 < \delta < 1$ ,  $\omega_n$  viene definita pulsazione naturale mentre  $\delta$  coefficiente di smorzamento. Nel piano complesso  $(\sigma, \omega)$ , con  $\sigma + \omega i = s$ ,  $\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$  rappresenta la parte immaginaria dei poli complessi coniugati e  $-\delta\omega_n$  la parte reale. La risposta  $y(t)$  al gradino unitario di tale sistema ha andamento oscillatorio e può essere caratterizzata dai seguenti parametri

- $S$ , *massima sovraelongazione*, definita come  $S = \frac{y(T_m) - y_\infty}{y_\infty} \times 100$ , in cui  $T_m$  è l'istante di massima sovraelongazione e  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .
- $T_a$ , *tempo di assestamento*, definito come il minimo valore del tempo  $t$  tale che  $|y(t) - y_\infty| \leq 0.05y_\infty$ , con  $t \geq T_a$ .

Per i sistemi del secondo ordine del tipo (4.9) si può dimostrare che

$$T_a \approx \frac{3}{\delta\omega_n} \quad (4.10)$$

mentre

$$S = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}. \quad (4.11)$$

## 4.7 Errore a regime

Si consideri il sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  chiuso in retroazione unitaria come in Figura 4.5.

Definito  $e(s) = u(s) - y(s)$ , si ha che  $e(s) = \frac{1}{1+G(s)}u(s)$  e per il Teorema del Valore Finale,  $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s)$ . L'errore a regime  $e_r$  ha significato quando  $u(s)$  coincide con i segnali di test, come il gradino, la rampa o la parabola.

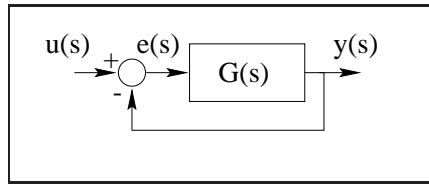


Figura 4.5: Sistema  $G(s)$  chiuso in retroazione unitaria.

## 4.8 Funzioni e modelli usati nel capitolo

In questo capitolo verranno utilizzati i seguenti files *Matlab* e *Simulink*:

`osservatori.mdl`, sistema *Simulink* in retroazione algebrica dell'uscita (Figura 4.6).

`assestamento.m`, file *Matlab* che grafica gli intervalli per il calcolo del tempo di assestamento.

`place eig.m`, file *Matlab* per l'assegnamento degli autovalori.

`osserv.mat`, file *Matlab* di dati per `place eig.m`.

`place eig stato.m`, file *Matlab* per l'assegnamento degli autovalori.

`osservatore identita.mdl`, modello *Simulink* dell'osservatore identità.

`retroazione osservatore.mdl` modello *Simulink* di sistema in retroazione dello stato stimato.

`retroazione stato stimato`, modello *Simulink* di sistema in retroazione dello stato stimato.

## 4.9 Progetto di una retroazione

Nel seguito si utilizzeranno i precedenti richiami per risolvere in ambiente *Simulink* un problema di assegnamento di autovalori mediante retroazione e di progetto di osservatori.

In riferimento al sistema tempo-continuo, lineare e stazionario nello spazio degli stati descritto dalle matrici  $(A, B, C, D)$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [ 0 \ 0 \ 1 ] \text{ e } D = 0 \quad (4.12)$$

1. si determinino gli autovalori del sistema assegnato e si progetti per tentativi (graficando l'andamento nel tempo dell'uscita) una retroazione uscita-ingresso, come in Figura 4.2, tale che il sistema retroazionato abbia una risposta al gradino (di ampiezza 10) caratterizzata da un tempo di assestamento pari a 3s. ed un errore a regime  $(v(t) - Ky(t))$  non superiore al 30% del valore dell'ampiezza del gradino.

Calcolare successivamente gli autovalori dello stesso sistema chiuso in retroazione.

Si faccia riferimento allo schema *Simulink* in Figura 4.6

Gli autovalori del sistema  $(A, B, C, D)$  risultano

```
>> eig(A)
```

```
ans =
```

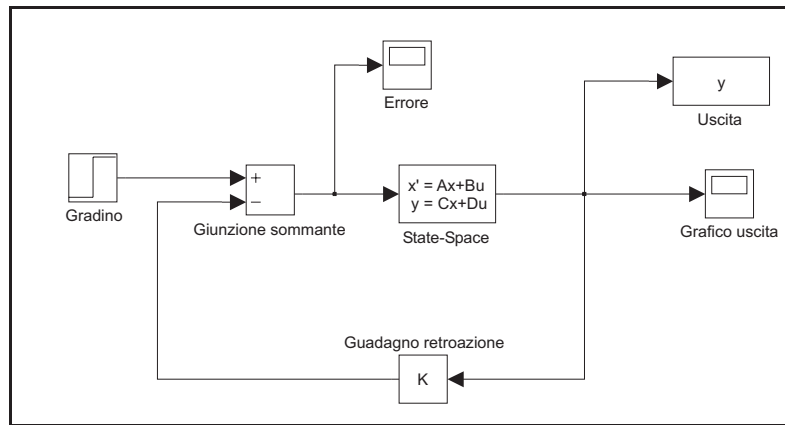


Figura 4.6: Sistema  $(A, B, C, D)$  chiuso in retroazione.

-4.0000  
-3.0000  
-2.0000

Dalle specifiche sul tempo di assestamento  $T_a$  (relativo ad un sistema del secondo ordine), si ottiene che la parte reale degli autovalori deve essere uguale a  $-1$ . Il procedimento di approssimazione del sistema in esame del terzo ordine con uno del secondo è possibile perché aumentando il guadagno di retroazione positivo, il più piccolo degli autovalori ( $-4$ ) tende a spostarsi verso sinistra nel piano complesso, mentre gli altri due ( $-3$  e  $-2$ ) diventano complessi coniugati con parte reale sempre più grande, fino a diventare positiva. Conseguentemente, il tempo di assestamento peggiora mentre l'errore a regime si abbassa. Attraverso la funzione `rlocfind`, si può determinare una possibile soluzione ( $K = 60$ ) del problema. L'andamento della risposta del sistema ad un gradino di ampiezza pari a 10 a partire dall'istante  $t = 0$  è riportato in Figura 4.7.

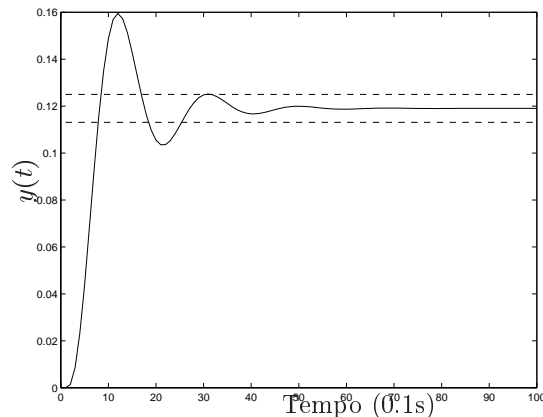


Figura 4.7: Risposta del sistema  $(A, B, C, D)$  ad un gradino.

Viene evidenziato anche l'intervallo ottenibile dalla definizione di  $T_a$  per verificare che il tempo di assestamento risulta approssimativamente uguale a  $30 \times 10^{-1}$  secondi.

L'errore a regime viene riportato in Figura 4.8

L'errore a regime, che vale 2.8571, risulta soddisfare la specifica imposta.

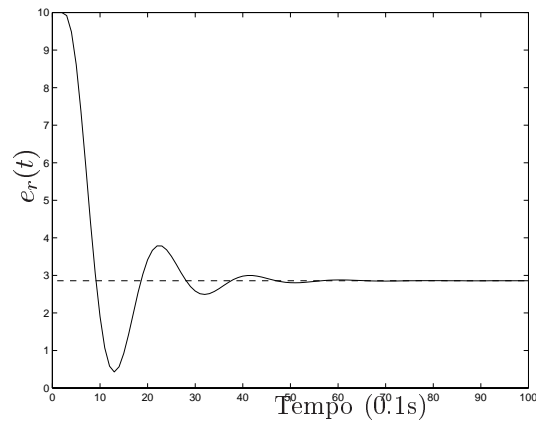


Figura 4.8: Errore a regime del sistema  $(A, B, C, D)$  in riferimento ad un gradino.

La funzione `rlocus` permette inoltre di verificare il corretto posizionamento degli autovalori

```
>>R=rlocus(A,B,C,D,60)
```

R =

```
-7.0000          -1.0000 + 3.3166i          -1.0000 - 3.3166i
```

Si osservi ancora che la risposta del sistema del terzo ordine è assimilabile a quella di uno del secondo ordine per la presenza di un autovalore reale inferiore rispetto alla parte reale dei due autovalori complessi coniugati. I due autovalori complessi rappresentano i *poli dominanti* per il sistema in retroazione, che si comporta quindi come un modello del secondo ordine. È perciò giustificato l'utilizzo della relazione 4.10 relativa ad un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati senza zeri.

Gli autovalori del sistema  $(A, B, C, D)$  in retroazione si ottengono

```
>>eig(A-B*K*C)
```

ans =

```
-7.0000
-1.0000 + 3.3166i
-1.0000 - 3.3166i
```

coincidenti con quelli determinati dalla funzione `RLOCUS`, per un valore di  $K = 60$  e contenuti nel vettore `R`.

2. Progettare per tentativi un osservatore identità per il sistema di partenza con autovalori reali e inferiori a  $-4$  in modo da assicurare che l'errore di stima  $e(t)$  scenda sotto al 2.5% in un tempo non superiore ad 1 secondo. Inoltre, i valori assoluti dei guadagni della matrice di retroazione dell'osservatore non devono risultare maggiori di 6. Si supponga che lo stato iniziale del sistema valga  $[12, 20, -30]$  e che l'osservatore parta dallo stato zero.

Dopo alcuni tentativi si sono determinati i valori corretti degli autovalori tali da soddisfare le specifiche richieste. La procedura è contenuta nel file `place_eig.m`

```

%%
%% Funzione place_eig: assegna gli autovalori per ottenere
%% un errore di stima e(t) inferiore a 2.5% dopo 1 secondo.
%% Gli autovalori consentono di ottenere guadagni dell'osservatore
%% inferiori a 6.
%% Le matrici A,B,C,D sono caricate dal file 'osserv.mat'.
%%

load osserv

AUTOV = [-4.85 , -4.9 , -4.82];
%AUTOV = [-5.0 , -4.5 , -5.5];
%AUTOV = [-2.0 , -3.0 , -4.0];
%AUTOV = [-4.5 , -5.0 , -5.5];

K = place(A',C',AUTOV)';

Ao = A - K*C;
Bo = [B K];
Co = eye(3);
Do = zeros(3,2);

```

mentre l'osservatore è implementato nel file *Simulink* rappresentato in Figura 4.9.

Si osservi come anche per l'assegnamento degli autovalori dell'osservatore sia possibile utilizzare la funzione PLACE, dal momento che  $(A - KC) = (A^T - C^T K^T)^T$ .

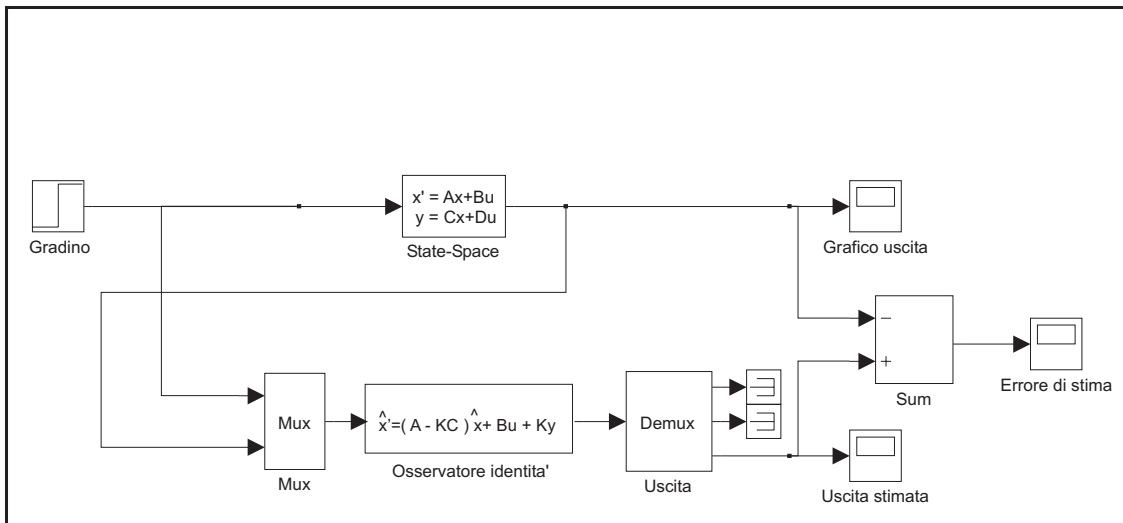


Figura 4.9: Osservatore identità per il sistema  $(A, B, C, D)$ .

Assegnando gli autovalori

AUTOV =

-4.8500   -4.9000   -4.8200

si sono ottenuti i seguenti guadagni

K =



-5.9427  
 -5.3700  
 5.5700

che soddisfano le specifiche richieste. L'errore di stima vale  $e(t) = 0.2282$  per  $t = 1s$  e l'andamento di  $e(t)$  è riportato in Figura 4.10.

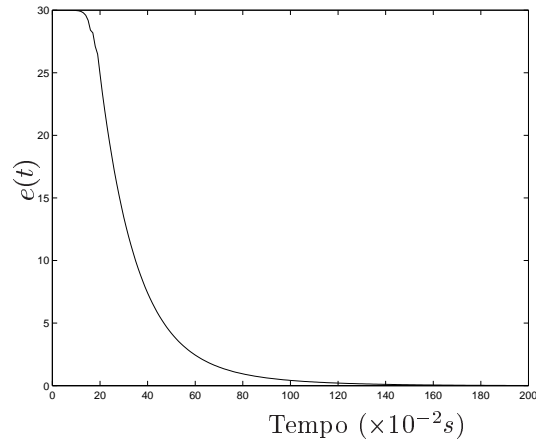


Figura 4.10: Andameno dell'errore di stima per il sistema  $(A, B, C, D)$ .

3. Per il sistema iniziale si progetti una retroazione dello stato stimato dall'osservatore calcolato al passo precedente in modo che vengano assegnati al sistema gli stessi autovalori che ha l'osservatore. Si grafichi l'andamento dell'uscita del sistema globale eccitato da un gradino di ampiezza unitaria.

Si possono assegnare al sistema di partenza gli autovalori dell'osservatore identità utilizzando il file `place eig stato.m`

```
%%
%% Assegna gli autovalori dell'osservatore identità al sistema
%% di partenza. Ks e' il guadagno della retroazione stato
%% stimato-ingresso.
%%
```

```
AUTOV = [-4.85 , -4.9 , -4.82];
```

```
Ks = place(A,B,AUTOV);
```

```
As = A - B*Ks;
```

e implementando lo schema a blocchi relativo ad una retroazione dello stato stimato-ingresso della Figura 4.11.

Gli autovalori  $[-4.8500 \quad -4.9000 \quad -4.8200]$  vengono assegnati con una matrice di guadagno di retroazione pari a

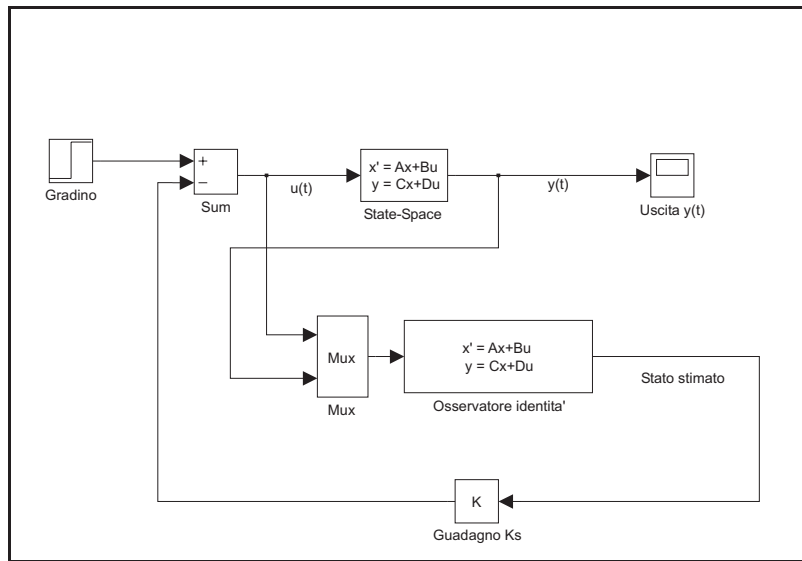


Figura 4.11: Retroazione dello stato stimato per il sistema  $(A, B, C, D)$ .

$K_s =$

5.5700    44.7600    90.5473

La risposta del sistema ad un gradino unitario chiuso in retroazione con lo stato stimato da un osservatore identità è rappresentata nella Figura 4.12.

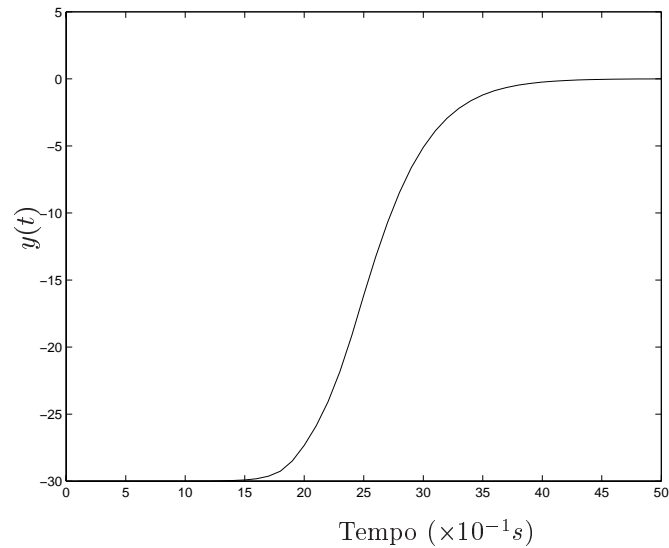


Figura 4.12: Risposta del sistema in retroazione con lo stato stimato.

## 4.10 Esercizi proposti in aula didattica.

È dato il sistema dinamico descritto dal modello

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

con  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^r$  e  $y(t) \in \mathfrak{R}^m$  e  $n = 4$ ,  $r = 1$ ,  $m = 1$ .

Le matrici del sistema siano

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -46 & -48 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ]. \quad (4.14)$$

In riferimento al sistema 4.13:

1. effettuare una realizzazione del sistema in ambiente *Simulink* e calcolarne gli autovalori;
2. determinare in ambiente *Matlab* il valore della matrice di retroazione  $Ks$  per una retroazione uscita-ingresso che assegni ad un autovalore il valore  $-9$ . Successivamente realizzare lo schema *Simulink* per il sistema in retroazione eccitato da un gradino di ampiezza 10; graficare la risposta al gradino  $y(t)$  e l'errore  $e(t)$ . Calcolare graficamente il tempo di assestamento e la massima sovraelongazione.
3. Dato in ingresso un gradino di ampiezza 10, determinare una matrice di retroazione uscita-ingresso  $Kr$  affinché il tempo di assestamento sia  $T_a = 3s$ . In tali condizioni, in seguito determinare graficamente la massima sovraelongazione.
4. Determinare per il sistema di partenza il guadagno  $Ko$  di un osservatore dello stato che assegni gli autovalori  $[-3, -3, -4]$ . Si grafichi l'errore di stima nelle ipotesi che lo stato iniziale del sistema parta da  $[12, -20, -30]$ .