Capitolo 5

Modelli approssimati di sistemi dinamici

Il problema della determinazione di modelli semplificati in grado di riprodurre la risposta del sistema originario con un accettabile grado di approssimazione viene chiamato *riduzione d'ordine del modello*. Tali modelli semplificati possono servire per il progetto di regolatori, oppure quando siano necessarie funzioni di trasferimento con un numero limitato di parametri.

Qualora non vengano richieste prestazioni elevate, per la sintesi di un sistema di controllo è sufficiente un modello approssimato ricavato con semplici prove sul processo.

In questo capitolo sarà presentata una tecnica di riduzione dell'ordine di un modello dinamico che consente di mantenere alcuni poli ed il guadagno statico del sistema di partenza.

Verranno inoltre presentate la funzioni *Matlab* per trasformare un modello nello spazio degli stati in una funzione di trasferimento (modello nel dominio delle frequenze).

5.1 Riduzione d'ordine di un modello

Dato un sistema rappresentato nella sua forma minima dalla funzione di trasferimento $G(s)$, qualora coppie polo/zero di $G(s)$ siano vicine tra loro nel piano complesso, è possibile forzare la cancellazione delle stesse mantenendo invariati tutti i parametri, compresa la costante di guadagno, per ottenere un modello approssimato $G_a(s)$ di ordine ridotto.

Ad esempio, per il sistema nella forma

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1\ s)}{(1 + \tau_2\ s)(1 + \tau_3\ s)} \tag{5.1}$$

supposto $\tau_1 \approx \tau_2$, si può utilizzare il modello descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{1}{(1 + \tau_3\ s)}. \tag{5.2}$$

Naturalmente così facendo, la risposta in frequenza associata alle funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_a(s)$ sarà diversa a partire dall'intorno della pulsazione della singolarità cancellata, $\omega = \frac{1}{\tau_1}$ mentre sarà simile per pulsazioni inferiori.

5.2 Poli dominanti

Una volta cancellate eventuali coppie di zeri e di poli prossimi tra loro nel piano complesso, vengono comunemente chiamati *poli dominanti* del sistema i poli, reali o complessi, nettamente più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri. La funzione di trasferimento approssimante di un sistema con poli dominanti può essere costruita considerando solo questi poli e ponendo la costante di guadagno pari a quella del sistema di partenza. È chiaro che l'approssimazione così ottenuta è essenzialmente valida in bassa frequenza, cioè per quei valori in frequenza in cui la risposta frequenziale è influenzata prevalentemente dal guadagno e dai poli dominanti.

In generale, data la funzione da approssimare

$$G(s) = K \frac{1 + \alpha_1 \ s + \cdots + \alpha_m \ s^m}{1 + \beta_1 \ s + \cdots + \beta_n \ s^n} \tag{5.3}$$

con $m < n$, la funzione di trasferimento del sistema di ordine ridotto risulta

$$G_a(s) = K \frac{1 + \alpha_1^{'} \ s + \cdots + \alpha_q^{'} \ s^q}{1 + \beta_1^{'} \ s + \cdots + \beta_p^{'} \ s^p} \tag{5.4}$$

in cui $q < p$ e $p < n$. Si noti che in continua ($s = 0$) il guadagno delle due funzioni di trasferimento coincide. Questo assicura che a regime il sistema di ordine ridotto si comporterà come quello iniziale.

I parametri della funzione di trasferimento descritta dalla Equazione 5.4 si possono determinare facendo in modo che la seguente relazione sia approssimativamente soddisfatta

$$\frac{|G(j\omega)|^2}{|G_a(j\omega)|^2} = 1 \tag{5.5}$$

per $0 \leq \omega \leq \infty$. Le caratteristiche in frequenza dei due sistemi devono essere quindi simili. Diverse procedure sono trattate in [6, 7].

5.3 Trasformazione di modelli nello spazio degli stati alla funzione di trasferimento

Dato un modello nello spazio degli stati descritto dalle matrici (A, B, C, D) è possibile ricavare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$ utilizzando la funzione *Matlab* `SS2TF`. Invocando quindi `[NUM,DEN] = ss2tf(A,B,C,D,iu)` vengono calcolati i coefficienti del numeratore `NUM` e del denominatore `DEN` della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)}$ relativo all'ingresso *iu* selezionato. Il vettore `DEN` contiene i coefficienti del denominatore secondo le potenze decrescenti di s. I coefficienti del numeratore sono contenuti nella matrice `NUM` con un numero di righe pari al numero di uscite del sistema.

La trasformazione inversa avviene attraverso la funzione `tf2ss` ed, in particolare, il comando `[A,B,C,D] = tf2ss(NUM,DEN)` calcola un modello nello spazio degli stati `(A,B,C,D)` corrispondente alla funzione di trasferimento descritta dal vettore `DEN` e dalla matrice `NUM`. Le matrici del modello nello spazio degli stati sono in forma canonica rispetto alle uscite.

Trasformazioni dallo spazio degli stati a quello delle funzioni di trasferimento e viceversa, possono essere effettuate attraverso le funzioni `ss` e `tf` di *Matlab*, secondo le istruzioni `SSsys = ss(A,B,C,D)`, `TFsys = tf(SSsys)` e `TFsys = tf(NUM,DEN)`, `SSsys = ss(TFsys)`.

5.4 Funzioni e modelli usati nel capitolo

In questo capitolo verranno utilizzati i seguenti files *Maltab* e *Simulink*:

`poli dominanti.mdl`, modello *Simulink* rappresentato in Figura 5.3.

`poli dominanti simul.mdl`, modello *Simulink* esteso per `poli dominanti.mdl`.

`poli_dominanti_step_impulse.mdl`, modello *Simulink* per la Figura 5.3.

`pulse step5.mdl`, modello *Simulink* dell'Esempio 5.1.

`poli dominanti.mat`, dati per il modello *Simulink* `poli_dominanti.mdl`.

`trasformate.mat`, file di dati *Maltab* per la generazione dei dati dell'esercizio.

5.5 Esempio

Nel seguito verranno applicate le tecniche richiamate nei paragrafi precedenti relativamente alla riduzione dell'ordine di un modello e alla trasformazione dallo spazio degli stati alla funzione di trasferimento.

1. Dato il sistema (A,B,C) calcolare la risposta impulsiva e la risposta al gradino unitario.

   Il sistema nello spazio degli stati è descritto dalle seguenti matrici in *Matlab*

```
A =

     0     1     0
   -11   -20   -15
    12    20    15


B =

     0
     1
    -1


C =

    14    18    13
```

   La risposta impulsiva e quella al gradino unitario possono essere calcolate attraverso lo schema *Simulink* in Figura 5.1.

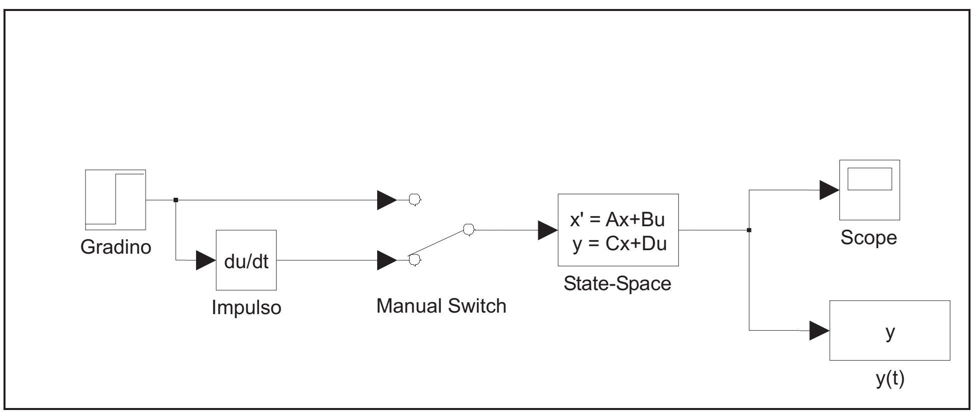
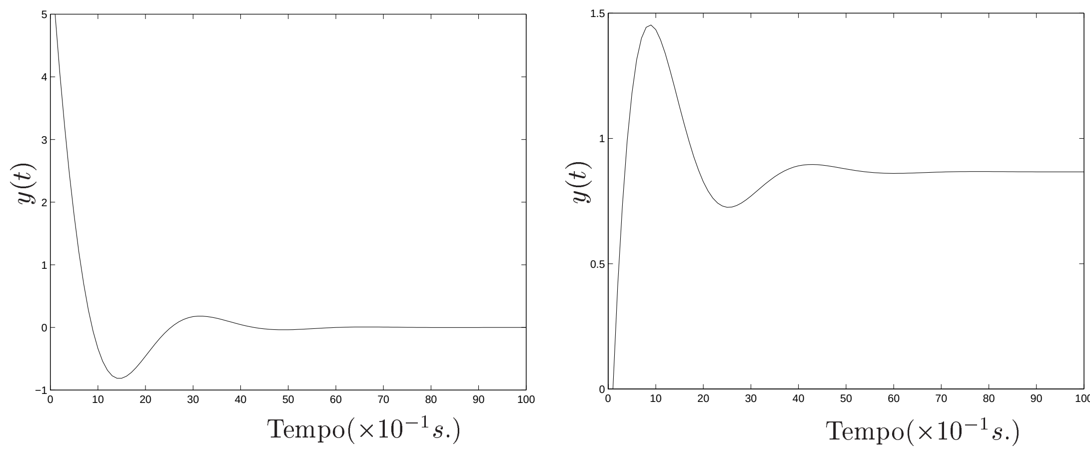


   Figura 5.1: Schema a blocchi del sistema (A,B,C)

   Lo switch manuale consente di selezionare il generatore della funzione da applicare all'ingresso del sistema.

   La Figura 5.2 rappresenta le risposte al gradino e all'impulso del sistema a partire dallo stato zero e dall'istante $t = 1$ s.



(a) (b)

Figura 5.2: Risposte all'impulso (a) e al gradino (b) del sistema (A,B,C)

2. Determinare la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine con lo stesso guadagno statico che approssimi la risposta impulsiva e quella al gradino unitario del sistema di partenza.

La funzione di trasferimento per il modello nello spazio degli stati del terzo ordine risulta

```
>>[NUM,DEN]=ss2tf(A,B,C,D)

NUM =

         0    5.0000   14.0000   13.0000


DEN =

    1.0000    5.0000   11.0000   15.0000
```

cioé

$$G(s) = \frac{5s^2 + 14s + 13}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15}. \tag{5.6}$$

Utilizzando la funzione *Matlab* per il calcolo delle radici di un polinomio, si determinano quelle relative a `DEN`. In particolare `DEN` è scomponibile nella forma

```
>>roots(DEN)

ans =

  -3.0000
  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
```

da cui $DEN(s) = (s+3)(s+1-2j)(s+1+2j)$, essendo j l'unità immaginaria, tale che $j = \sqrt{-1}$.

Se $G(s)$ viene scritto come

$$G(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s^2 + 2s + 5} + \frac{k_3}{s+3} \tag{5.7}$$

imponendo l'uguaglianza delle Equazioni 5.7 e 5.6, si ottiene che $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ e $k_3 = 2$.

Il sistema di partenza diventa quindi

$$G(s) = \frac{3s+1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{2}{s+3} \tag{5.8}$$

che puó essere riscritto nella forma (5.1) per mettere in evidenza i guadagni a regime ($s = 0$)

$$G(s) = \frac{\frac{1}{5}(3s+1)}{\frac{s^2}{5} + \frac{2}{5}s + 1} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{s}{3} + 1}. \tag{5.9}$$

Il guadagno complessivo risulta $\frac{13}{15}$. Eliminando la parte di $G(s)$ che corrisponde al polo con parte reale più negativa, si ottiene la funzione di trasferimento approssimata

$$G_a(s) = \frac{13}{15} \frac{3s+1}{\frac{s^2}{5} + \frac{2}{5}s + 1} \tag{5.10}$$

avente lo stesso guadagno per $s = 0$ di $G(s)$.

Lo schema a blocchi del sistema di partenza e quello di ordine ridotto sono rappresentati nella Figura 5.3

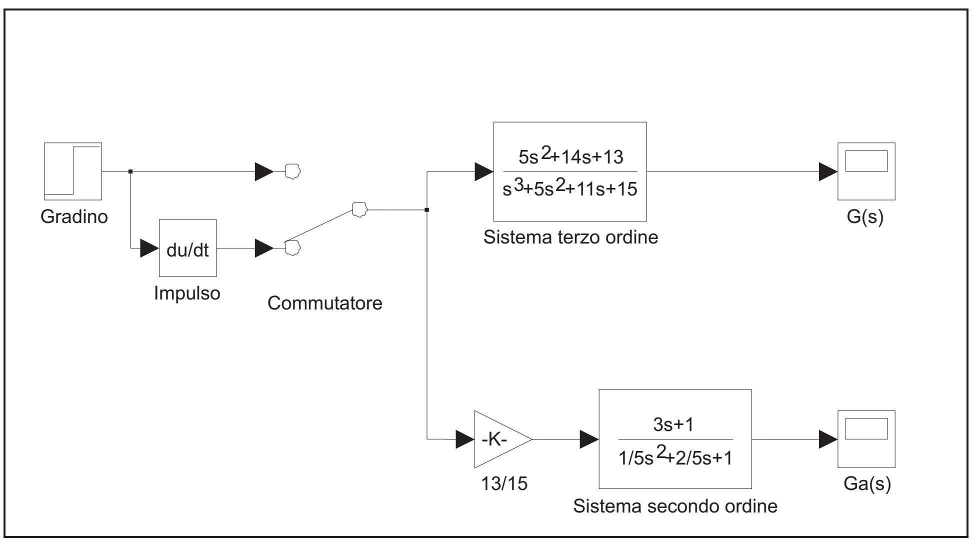
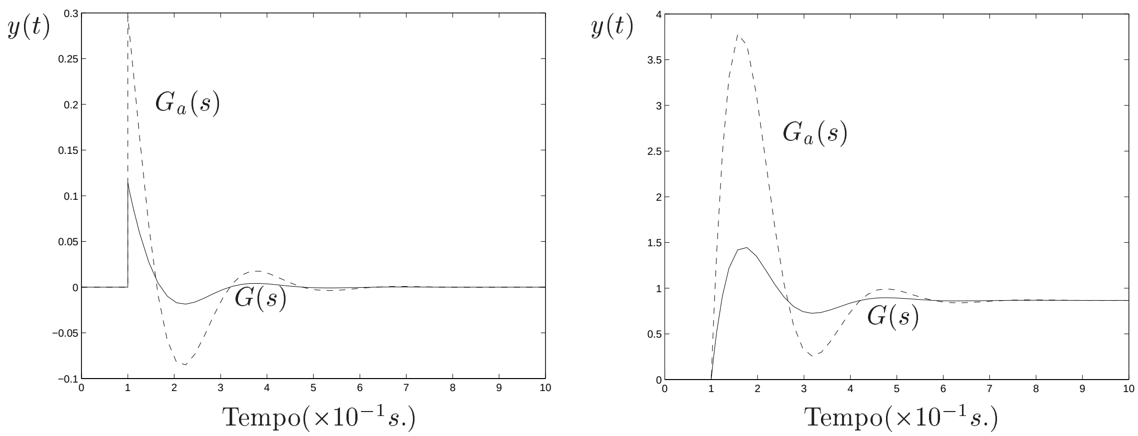


Figura 5.3: Schema a blocchi dei sistemi $G(s)$ e $G_a(s)$.

Le risposte impulsiva e quella al gradino unitario del sistema $G(s)$ e $G_a(s)$ sono confrontate nella Figura 5.4.

3. Confrontare le uscite per un ingresso a rampa e per una sinusoide di pulsazione variabile nel range $0.1 \div 5$ rad/s.



(a) (b)

Figura 5.4: Risposte all'impulso (a) e al gradino (b) dei sistemi $G(s)$ e $G_a(s)$

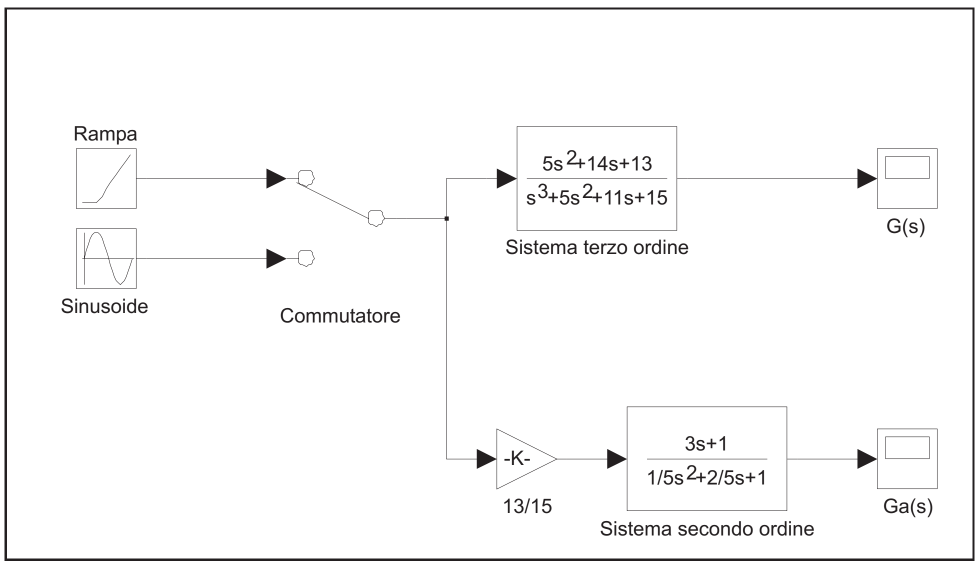
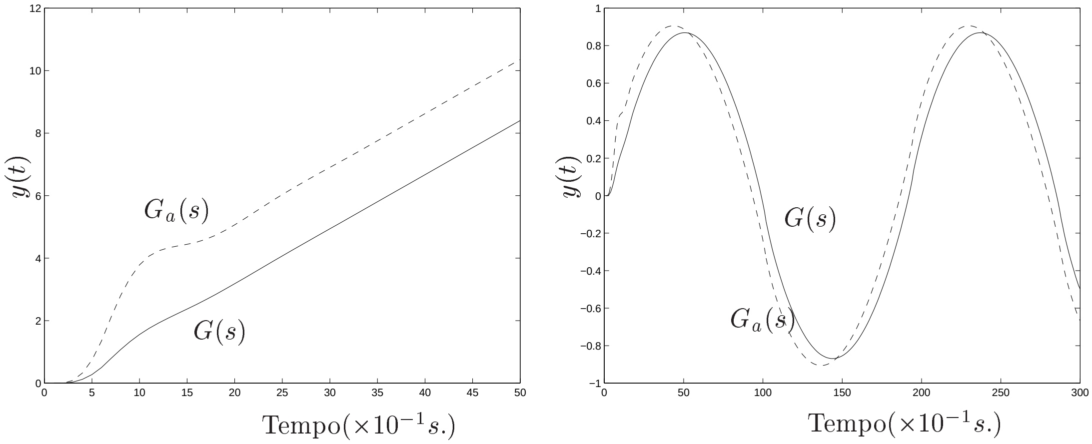


Figura 5.5: Schema a blocchi dei sistemi $G(s)$ e $G_a(s)$ con rampa e sinusoide.

In riferimento allo schema *Simulink* riportato in Figura 5.5, si visualizzano le seguenti risposte in Figura 5.6, rispettivamente, per una rampa di pendenza unitaria a partire dall'istante $t = 0$ e per una sinusoide di ampiezza unitaria, frequenza 0.1 rad/sec e fase iniziale nulla.

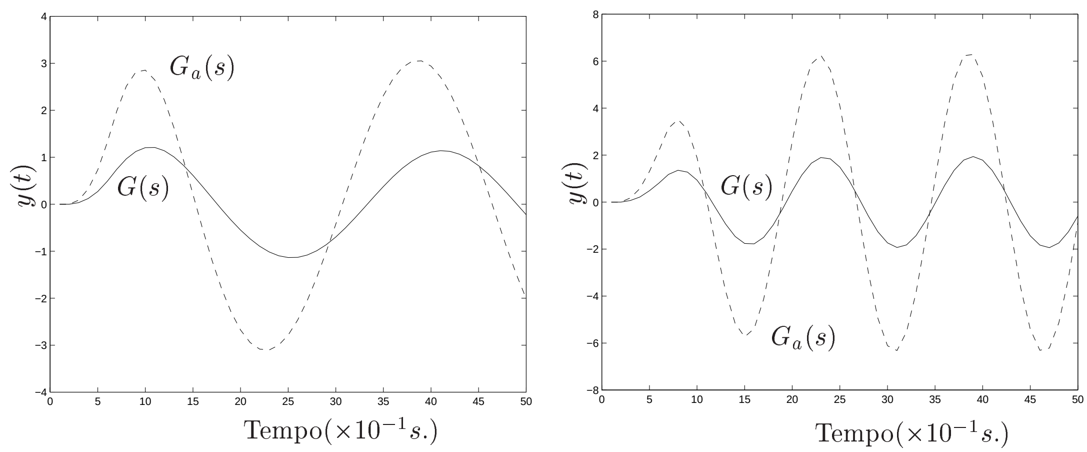
Nella Figura 5.7 sono raffigurate le risposte dei sistemi eccitati con sinusoidi di frequenza 1 rad/s e 2 rad/s.

Nella Figura 5.8 sono infine rappresentate le risposte per sinusoidi di frequenza 3 rad/s e 5 rad/s. Si osservi come i sistemi abbiano risposte confrontabili per basse frequenze della sinusoide. Questo è giustificato dal fatto che è stato rimosso il polo a parte reale -3, lasciando i poli complessi coniugati a parte reale -1 e perciò le approssimazioni di $G(s)$ e $G_a(s)$ valgono quando s è prossimo allo zero.



(a) (b)

Figura 5.6: Risposte alla rampa (a) e alla sinusoide (b) dei sistemi $G(s)$ e $G_a(s)$



(a) (b)

Figura 5.7: Risposte ad una sinusoide con frequenza 1 rad/s (a) e 2 rad/s (b).

5.6 Esercizi proposti in aula didattica.

Un modello nello spazio degli stati di un trasformatore audio, alimentato al primario da un generatore di tensione $u(t)$ e chiuso al secondario su una resistenza di carico di 600Ω, è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \\ y(t) & = & \mathrm{C}x(t) \end{array} \right. \tag{5.11}$$

in cui $u(t) \in \Re^r$, $y(t) \in \Re^m$ e $x(t) \in \Re^n$ con $m = r = 1$ e $n = 4$. L'uscita $y(t)$ è la corrente che scorre

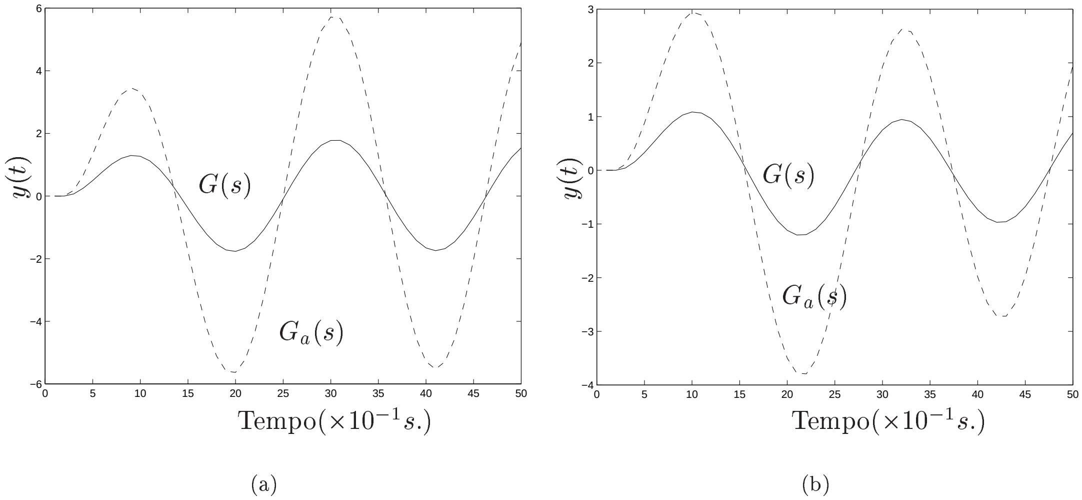


Figura 5.8: Risposte ad una sinusoide con frequenza 3 rad/s (a) e 5 rad/s (b).

nella resistenza di carico. Le matrici del sistema sono

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{9}10^{10} & -\frac{5}{9}10^{6} & -\frac{5}{9}10^{10} & 0 \\ 0 & \frac{2000}{13} & 0 & -\frac{2000}{13} \\ 0 & 0 & 5\cdot 10^{10} & -5\cdot 10^{6} \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{9}10^{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.96 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Dopo avere realizzato in ambiente *Simulink* il sistema (5.11) precedentemente indicato, attraverso la sua funzione di trasferimento, si determini (in ambiente *Matlab* e *Simulink*):

1. la risposta del sistema iniziale (5.11) ad un gradino di ampiezza pari ad 1V per la durata di 1ms;

2. la risposta dei singoli sottosistemi con cui il modello iniziale (5.11) può essere descritto e in cui può essere suddiviso (sistemi del primo e del secondo ordine);

3. la risposta del sistema iniziale (5.11) con quella dei singoli sottosistemi quando alimentati da una sinusoide di ampiezza 10V e frequenze variabili in un range di 10, 100, 10k e 100kHz.

Infine effettuare qualche osservazione sulle risposte ottenute e sulle capacità di approssimazione dei singoli sottomodelli, in riferimento al sistema iniziale (5.11).