

Capitolo 6

Identificazione di Sistemi Dinamici

È già stato detto in precedenza come nello studio dei sistemi dinamici e nella sintesi dei sistemi di controllo si faccia spesso uso di modelli approssimati. Ad esempio, perché il sistema da controllare ha una struttura complessa.

Un ulteriore motivo di interesse che spinge a ricorrere a modelli approssimati è relativo al caso in cui la modellazione a partire dalle leggi che governano i fenomeni in esame richieda uno sforzo eccessivo o la valutazione del modello sia di fatto impossibile.

Qualora non vengano richieste prestazioni elevate, per la sintesi del sistema di controllo è allora spesso sufficiente un modello approssimato, ricavato velocemente mediante semplici prove sul processo.

Nei paragrafi seguenti verranno presentati metodi per ricavare, da semplici prove sul processo, modelli approssimati di struttura semplice. Si farà riferimento unicamente a sistemi SISO asintoticamente stabili.

6.1 Funzioni e modelli usati nel capitolo

In questo capitolo verranno utilizzati i seguenti files *Matlab* e *Simulink*:

`OrdineSistema.m`, file *Matlab* per la determinazione dell'ordine di un sistema dinamico e dei parametri.

`esercizio_cap7.m`, file *Matlab* per la determinazione dell'ordine e dei parametri di un sistema dinamico.

`dati_cap7.mat`, file di dati per il blocco *Simulink* di Figura 6.9.

`ordine_cap7.m`, file *Matlab* per la determinazione dell'ordine e dei parametri di un sistema dinamico.

`esercizio_cap7.mdl`, sistema *Simulink* per la generazione di sequenze (Figura 6.8).

`ident1_cap7.mdl`, sistema *Simulink* per il confronto di sistemi identificati col metodo delle aree.

`ident2_cap7.mdl`, schema *Simulink* di Figura 6.3.

`ident_cap7.mdl`, sistema *Simulink* per il confronto di sistemi identificati col metodo delle aree.

`identificazione.mdl`, modello *Simulink* di Figura 6.1.

`es1_cap7.mdl`, schema *Simulink* di Figura 6.9.

6.2 Realizzazione di sequenze ingresso-uscita di un sistema

Tale problema prevede come dati disponibili le sequenze di ingresso e di uscita rilevate su un sistema, in questo caso discreto. Si vuole ottenere un modello nello spazio degli stati o di ingresso-uscita compatibile con tali sequenze. La soluzione di tale problema verrà considerata per sistemi non puramente dinamici con un solo ingresso ed una sola uscita.

Assegnate le generiche sequenze di ingresso e di uscita del sistema dinamico lineare stazionario e discreto $u(t)$ e $y(t)$, con $t = 0, 1, 2, \dots, L - 1$, si vuole determinare un modello di ordine minimo compatibile con tali sequenze.

Si definisca, a tal fine, la matrice di campioni di ingresso e di uscita H_i (matrici di Hankel), di dimensione $N \times 2(i + 1)$, con la seguente struttura

$$H_i = [H_i^u \ H_i^y] \quad (6.1)$$

ove

$$H_i^u = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(i) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(i+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-1) & u(N) & \dots & u(N+i-1) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$H_i^y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(i) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(i+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & y(N) & \dots & y(N+i-1) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

con $N + i \leq L$. Si consideri inoltre la sequenza di matrici

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots \quad (6.4)$$

con $\Sigma_k = H_k^T H_k$. La prima matrice singolare della sequenza, Σ_k , definisce l'ordine minimo per un modello di ingresso-uscita compatibile con le sequenze considerate, $n = k - 1$. La singularità di Σ_k consente, infatti, se la sequenza di ingresso applicata è opportuna, di scrivere la relazione

$$y(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y(j) + \sum_{j=0}^n \beta_j u(j) \quad (6.5)$$

che è del tipo

$$p(z)y(t) = q(z)u(t) \quad (6.6)$$

con

$$p(z) = z^n - \alpha_{n-1}z^{n-1} - \dots - \alpha_1z - \alpha_0 \quad (6.7)$$

$$q(z) = \beta_n z^n - \beta_{n-1}z^{n-1} - \dots - \beta_1z - \beta_0$$

in cui z è l'operatore di anticipo unitario, tale che $zy(t) = y(t + 1)$.

I parametri del modello possono essere ottenuti calcolando il Ker di Σ_k da cui

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \text{Ker}(\Sigma_k). \quad (6.8)$$

Si osservi che per ottenere i parametri come in (6.7) occorre normalizzare il valore dei parametri rispetto α_n , essendo stato tale parametro forzato ad 1 nelle (6.7).

Una realizzazione completamente osservabile per la rappresentazione di ingresso-uscita trovata è fornita dall'insieme di matrici (A_d, B_d, C_d, D_d) , date da

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \end{bmatrix}, B_d^* = S^{-1} \bar{B}_d = \begin{bmatrix} d_0 \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

$$C_d = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], D_d = [d_0], B_d = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

dove

$$S = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_0 & 1 \\ -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

La matrice S è sempre non singolare e $|\det(S)| = 1$.

Si può dimostrare inoltre che la possibilità di ottenere una realizzazione di sequenze di ingresso/uscita di un sistema dinamico dipende dalla funzione di ingresso applicata al sistema. Come si vedrà in seguito, la condizione algebrica che deve essere soddisfatta per l'idoneità dell'ingresso è l'indipendenza delle colonne nella sottomatrice di Hankel formata da campioni dell'ingresso nelle matrici H_i per $i \leq n$.

6.3 Identificazione di un sistema dinamico

Il problema dell'identificazione di un sistema dinamico consiste, al pari di quello della realizzazione, nella determinazione di un modello matematico a partire dalle sequenze di ingresso e di uscita. Nel problema della realizzazione, tuttavia, si suppongono i dati privi di rumore additivo e generati da un processo descrivibile esattamente mediante la classe di modelli considerata. Nell'identificazione invece è presente sui dati una certa imprecisione dovuta agli errori presenti nel processo di rilevazione ed i processi modellati presentano, in genere, una complessità maggiore (dovuta a non linearità, non stazionarietà ed altri fenomeni) rispetto a quella descrivibile esattamente dalla classe di modelli utilizzati (spesso lineari e stazionari).

Non è quindi possibile utilizzare, per l'identificazione, gli stessi algoritmi utilizzabili per la realizzazione. Si consideri la matrice di Hankel H_i e la sequenza

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots \quad (6.11)$$

dove

$$\Sigma_i = H_i^T H_i. \quad (6.12)$$

Nel caso della realizzazione l'ordine del sistema si ottiene valutando la singolarità delle matrici Σ_i (che hanno rango uguale al numero di colonne linearmente indipendenti delle matrici H_i); l'indice corrispondente alla prima matrice singolare definisce infatti l'ordine del sistema.

Nell'ambito delle procedure di identificazione, utilizzando cioè sequenze ingresso-uscita estratte da processi reali, tutte le matrici Σ_i risultano non singolari (definite positive). Un ordine accettabile

per un modello del processo da identificare può essere ottenuto valutando l'indice di singolarità per le matrici Σ_i quale, ad esempio, il minimo autovalore λ_{min} . Si sceglierà quindi come ordine per il modello quello corrispondente all'indice i per il quale $\lambda_{(i) min}$ non sia molto superiore a $\lambda_{(i+1) min}$.

Il valore di $\lambda_{(i) min}$ può essere infatti associato all'errore di chiusura, sui dati, di un modello di ordine i mentre la differenza tra $\lambda_{(i) min}$ e $\lambda_{(i+1) min}$ può essere associata al miglioramento che si ottiene nella descrizione dei dati passando da un modello di ordine i ad uno di ordine $i + 1$.

I parametri del modello possono essere determinati eliminando l'ultima colonna della matrice Σ_n , (perché dipendente dalle rimanenti $2n - 1$) e calcolando l'espressione

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \text{pinv}(\Sigma'_n)\sigma_n \quad (6.13)$$

dove Σ'_n è la matrice a cui è stata eliminata la colonna σ_n linearmente dipendente dalle precedenti $n - 1$

6.3.1 Esempio di identificazione di un sistema dinamico

Si assume $L = 210$ e $N = 200$. Il valore del primo parametro è ottenuto impostando opportunamente la durata di simulazione per il modello *Simulink* rappresentato nella Figura (6.1)

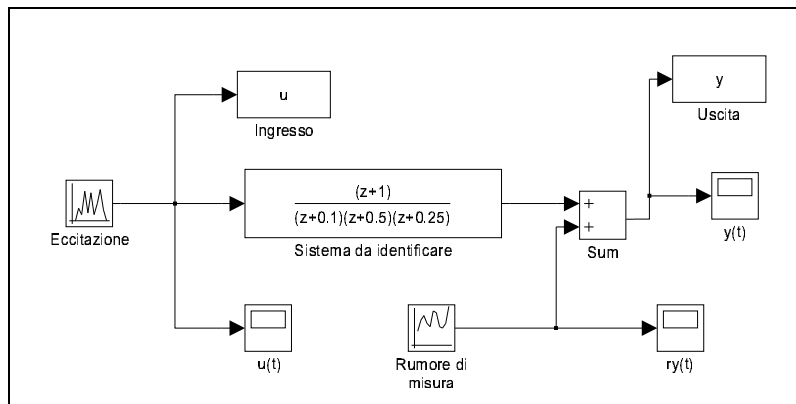


Figura 6.1: Blocco per la generazione delle sequenze ingresso/uscita.

e utilizzato per generare le sequenze di ingresso e di uscita u e y del sistema descritto dalla funzione di trasferimento discreta

$$G(z) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{1 + z}{z^3 + 0.85z^2 + 0.2z + 0.0125} \quad (6.14)$$

Si utilizza il seguente programma *OrdineSistema.m* per la determinazione dell'ordine del sistema e dei parametri del sistema stesso.

```
%%
%% File per la determinazione dell'ordine e dei parametri di
%% un sistema dinamico
%%
```

```

n = 4;
N = 200;

U = myhank(u,N+n,n,0);
Y = myhank(y,N+n,n,0);

UY = [U Y];

Sigma = UY'*UY;

autov = eig(Sigma); % Ordine del sistema meno 1

Sigmap = Sigma(1:2*n,1:2*n-1);

param = pinv(Sigmap)*Sigma(1:2*n,2*n); % Parametri del modello

```

Testando ordini crescenti, si ottiene $n = 4$, da cui, l'ordine corretto del sistema risulta 3 e le variabili `param` e `autov` valgono rispettivamente

```
>> param
```

```

param =

    1.0000
    1.0000
    0.0000
    0.0000
   -0.0125
   -0.2000
   -0.8500

```

```
>> autov
```

```

autov =

   179.8243
   168.6020
   212.7495
   289.5920
    29.7874
     0.0000
   441.7256
   454.5707

```

Tutto ciò nelle ipotesi di assenza del rumore, mentre con un rumore di deviazione standard pari al 10% (varianza 0.01), si ottiene

```
>> param
```

```

param =

    1.0974
    1.0125

```

```

-0.0050
-0.0085
-0.0364
-0.1980
-0.9500

```

```
>> autov
```

```
autov =
```

```

182.9639
167.2830
217.2299
296.4164
31.2895
0.8997
459.7215
448.7670

```

```
>>
```

Tale disturbo può rappresentare il rumore di misura presente sui dati acquisiti attraverso sensori.

`myhank.m` è la funzione per costruire le matrici di Hankel. Richiede in ingresso il vettore dei dati di lunghezza sufficiente tale da generare un numero n di colonne di N elementi. Dall'help in linea si ottiene

```
>> help myhank
```

```

MyHank(Yvet,Nseq,Ord,Off) Matrice di Hankel con Ord colonne, Nseq-Ord righe,
ottenuta dal vettore Yvet , partendo dal suo primo elemento (Off = 0);
altrimenti partira' dall'elemento Off+1 di Yvet. Il vettore deve essere
lungo almeno Nseq-1.

```

```
>>
```

L'espressione `param = pinv(Sigma)*Sigma(1:2*n,2*n)` calcola i parametri del modello usando il metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS).

6.4 Modelli ricavati dalla risposta al gradino

Modelli approssimati di sistemi reali sono spesso ricavati sottoponendo il processo in esame a particolari segnali di ingresso.

Molti processi sono caratterizzati da una risposta al gradino non divergente ed essenzialmente non oscillante salvo durante il transitorio. La risposta è quindi assimilabile a quella di un sistema con poli reali negativi ed eventualmente zeri, anche a parte reale positiva. Per questi sistemi è possibile ricavare un modello approssimato, valido in bassa frequenza, descritto da una funzione di trasferimento caratterizzata da un solo polo reale e un ritardo

$$G(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{1 + Ts} \quad (6.15)$$

Il parametro τ è chiamato *ritardo equivalente* mentre T , *costante di tempo equivalente*. Nel seguito viene descritto un *metodo*, detto *delle aree*, per ricavare K , τ e T , utilizzando la risposta ad un gradino di ampiezza g_0 del sistema descritto dalla funzione di trasferimento (6.15). Il guadagno del sistema può essere determinato direttamente come $K = \frac{r_0}{g_0}$, in cui r_0 è il valore di regime della

risposta del sistema. Inoltre, in riferimento alla Figura 6.2, si dimostra che l'area S_1 , compresa tra la risposta e l'asintoto della curva, è data da

$$S_1 = r_0(\tau + T) \quad (6.16)$$

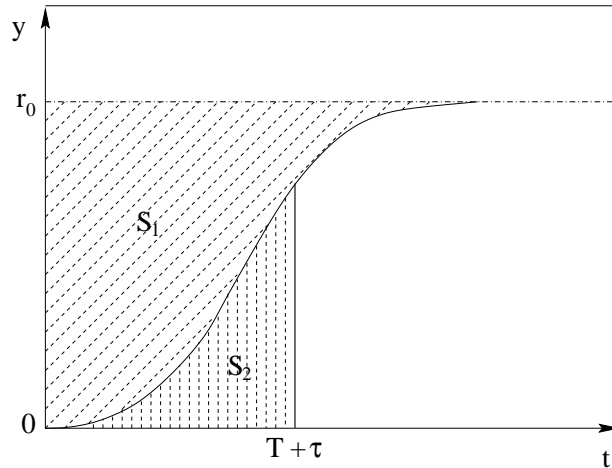


Figura 6.2: Parametri caratteristici della risposta al gradino del sistema.

Dalla sua valutazione si ricava quindi il valore di $T + \tau$. Considerando ora l'area S_2 , compresa tra la curva, l'asse dei tempi e una retta verticale passante per il punto di ascissa $T + \tau$, si dimostra che

$$S_2 = r_0 \frac{T}{e} \quad (6.17)$$

da cui

$$T = \frac{eS_2}{r_0} \quad (6.18)$$

Data la risposta al gradino del processo di cui si vuole determinare il modello approssimato (6.15), il metodo presentato richiede di ricavare preliminarmente il guadagno $K = \frac{r_0}{g_0}$; successivamente è necessario calcolare l'area S_1 , da questa dedurre il valore $T + \tau$ che individua l'area S_2 , calcolare questa seconda area ed infine ricavare $T = \frac{eS_2}{r_0}$ e $\tau = \frac{S_1 - r_0 T}{r_0}$. Si osservi come questo metodo sia robusto nei confronti del rumore dato che per la valutazione dei parametri utilizza il calcolo di due aree.

6.4.1 Identificazione di un modello polo-ritardo

Si consideri il sistema continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{1 + 3s} \quad (6.19)$$

la cui risposta al gradino unitario è ottenuta dallo schema *Simulink* di Figura 6.3

Lo schema permette di calcolare inizialmente l'area S_1 impostando un tempo di simulazione sufficientemente lungo affinché la risposta del sistema arrivi a regime. Da S_1 si ricava $T + \tau$. Per calcolare l'area S_2 si imposta la durata della simulazione pari ad un tempo $T + \tau$, da cui ricavare T . Il calcolo di K può essere effettuato direttamente in *Matlab*.

In questo caso il gradino è di ampiezza unitaria e $g_0 = r_0 = 1$. La durata iniziale della simulazione pari a 50 secondi. Si ottiene un valore di $S_1 = T + \tau = 8.0185$. Impostando a questo valore la durata della seconda simulazione, si ottiene $S_2 = 1.1150 = \frac{T}{e}$ da cui $T = 3.0309$ e $\tau = 4.9876$.

Le risposte al gradino del modello da identificare e quello identificato sono riportate in Figura 6.4.

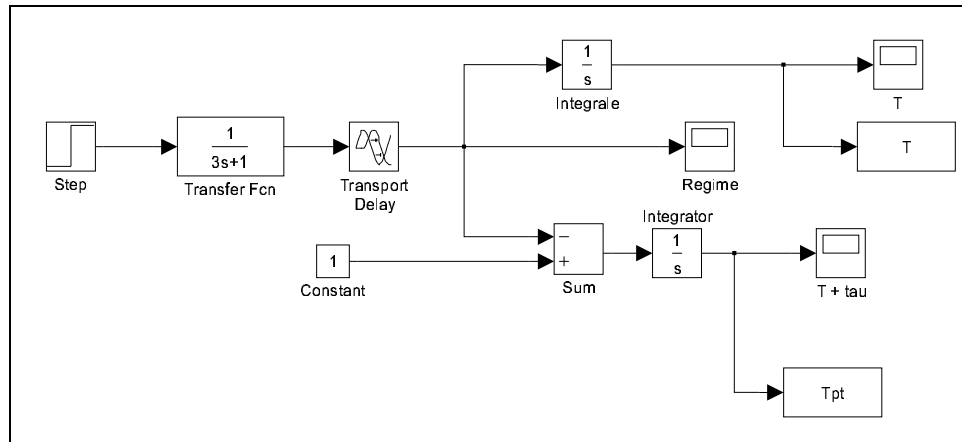


Figura 6.3: Schema *Simulink* per il calcolo delle aree.

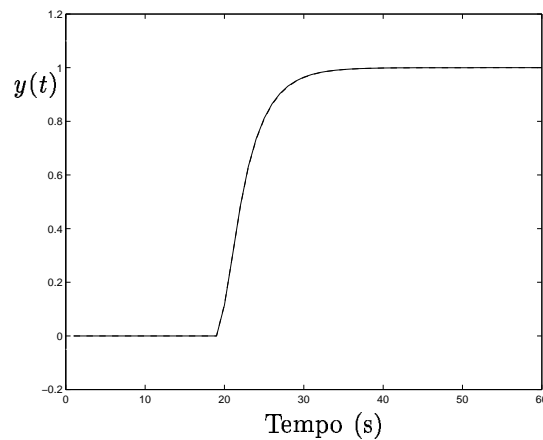


Figura 6.4: Confronto delle risposte al gradino dei sistemi iniziale ed identificato.

6.4.2 Identificazione di un modello polinomiale

Si consideri il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^5} = \frac{1}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}. \quad (6.20)$$

In base al metodo precedentemente descritto e in riferimento allo schema *Simulink* di Figura 6.5 si determinano i seguenti valori: $K = 1$, $\tau = 2.6153$ e $T = 2.3847$. La funzione di trasferimento del modello approssimato è quindi

$$G_a(s) = \frac{e^{-2.6153s}}{1 + 2.3847s}. \quad (6.21)$$

La Figura 6.6 illustra le risposte al gradino del sistema di partenza e di quello identificato, mentre i relativi diagrammi di Bode sono rappresentati in Figura 6.7.

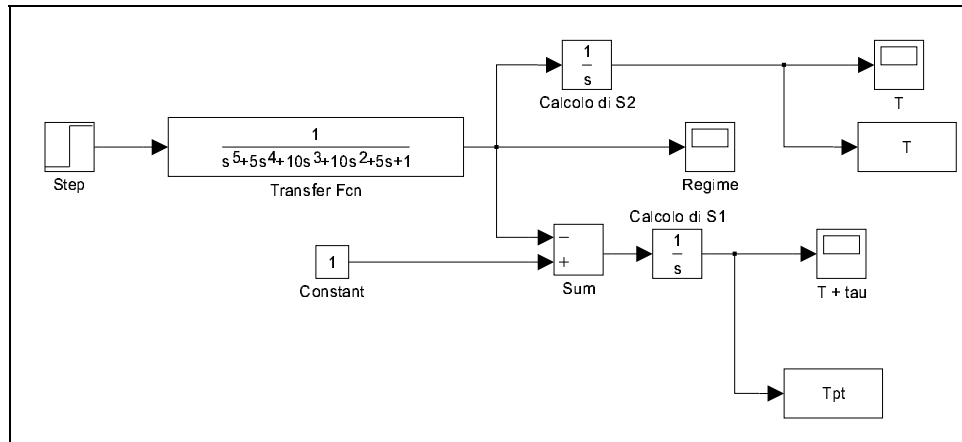


Figura 6.5: Schema *Simulink* per l'identificazione di una funzione di trasferimento.

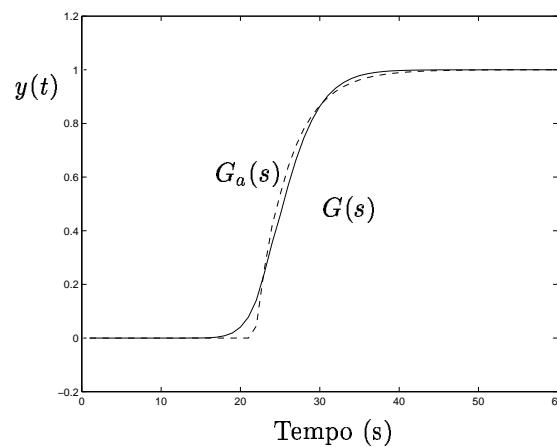


Figura 6.6: Confronto delle risposte al gradino dei sistemi iniziale ed identificato.

6.5 Esercizi proposti in aula didattica.

Nel file *Matlab dati_cap7.mat* sono date le sequenze ingresso ed uscita $u(t)$ e $y(t)$ ($L = 210$) relative ad un sistema lineare dinamico stazionario e tempo-discreto SISO. Si definisce errore quadratico medio di ricostruzione, J , la quantità

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{y}(t) - y(t))^2 \tag{6.22}$$

in cui $\hat{y}(t)$ è la stima di $y(t)$ all'istante t fornita dal modello identificato.

1. Determinare l'ordine del modello affinché l'errore quadratico J risulti inferiore a 0.0182 per $N = 200$.
2. Costruire lo schema *Simulink* per il confronto dell'uscita misurata e quella ricostruita e per il calcolo dell'errore di ricostruzione.

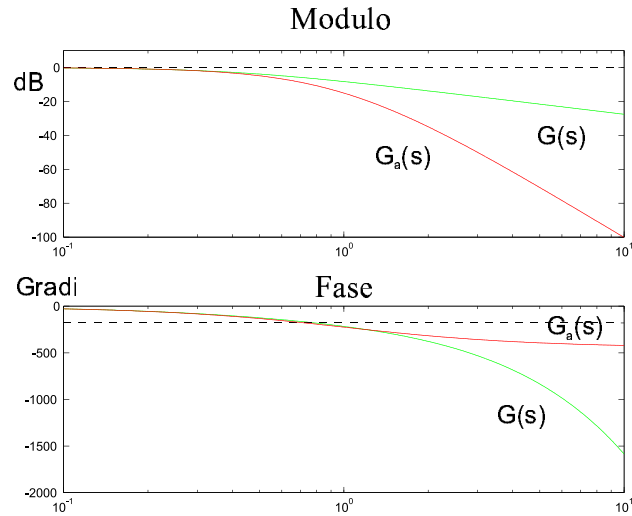


Figura 6.7: Diagrammi di Bode dei sistemi iniziale ed identificato.

Risoluzione

Le sequenze relative all'ingresso e all'uscita del sistema *Simulink* in Figura 6.8 sono contenute nel file dati cap7.mat.

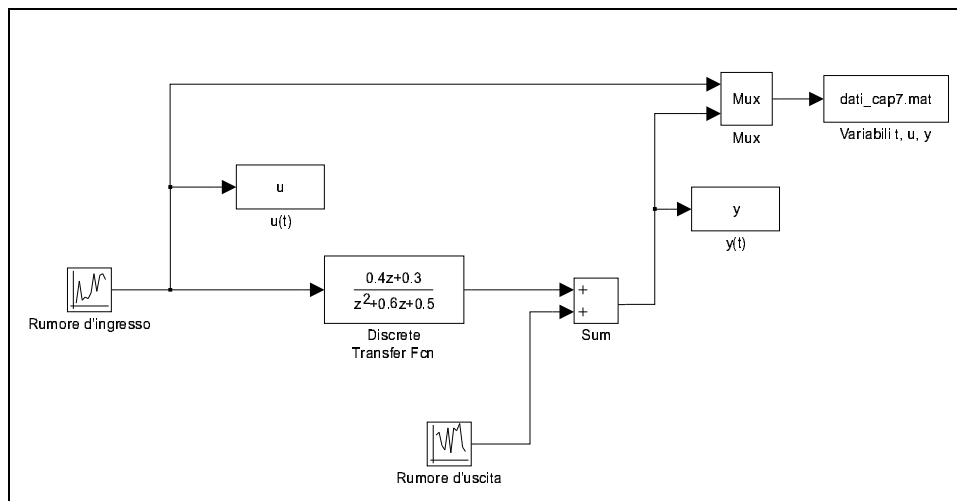


Figura 6.8: Blocco *Simulink* per la generazione delle sequenze $u(t)$ e $y(t)$.

Equivalentemente, può essere utilizzato lo schema *Simulink* che carica le sequenze ingresso uscita del sistema dinamico iniziale per generare il vettore dell'errore di ricostruzione, riportato in Figura 6.9 Il modello di partenza è del secondo ordine puramente dinamico. A causa del rumore sull'uscita, è necessario utilizzare un modello del terzo ordine non puramente dinamico. Infatti, per un sistema del secondo ordine, si ottengono i seguenti autovalori e i parametri

autov =

23.9883
55.9760

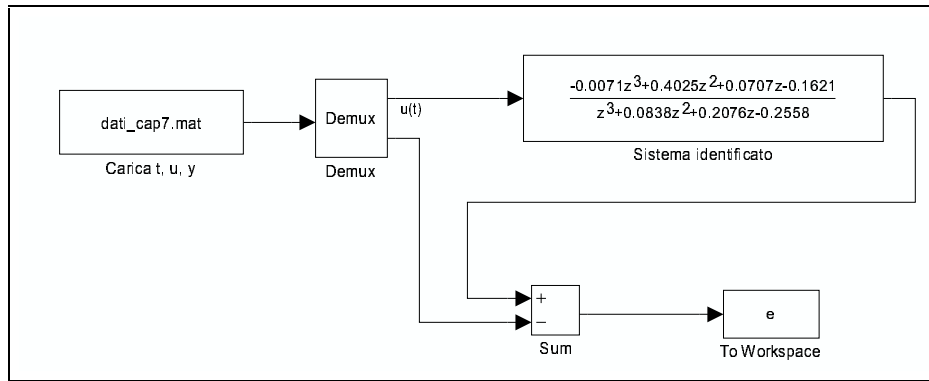


Figura 6.9: Blocco *Simulink* per la generazione dell'errore di ricostruzione $e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$.

```

2.8259
162.6950
190.1871
270.7600

```

```
>> param
```

```
param =
```

```

0.2726
0.4026
-0.0005
-0.5409
-0.5880

```

```
>>
```

corrispondente alla funzione di trasferimento del sistema non puramente dinamico

$$G_a(z) = \frac{-0.0005z^2 + 0.4026z + 0.2727}{z^2 + 0.5880z + 0.5409}. \quad (6.23)$$

Tale sistema, pur essendo dello stesso ordine del sistema di partenza, non soddisfa la condizione su J , che risulta infatti $J = 0.0183$. Occorre utilizzare un sistema del terzo ordine, i cui parametri sono

```
autov =
```

```

2.8621
2.7659
24.1685
57.5281
170.4852
161.9943
243.2733
279.3579

```

```
>> param
```

```
param =
```

```
-0.1621
```

```

0.0707
0.4025
-0.0071
0.2558
-0.2076
-0.0838
>>

```

corrispondente alla funzione di trasferimento del sistema non puramente dinamico

$$G_a(z) = \frac{-0.0071z^3 + 0.4025z^2 + 0.0707z - 0.1621}{z^3 + 0.0838z^2 + 0.2076z - 0.2558}. \quad (6.24)$$

che genera un errore quadratico medio di ricostruzione pari a 0.0180.

La Figura 6.10 riporta l'uscita misurata e quella ricostruita e l'errore di ricostruzione corrispondenti al modello approssimato del terzo ordine.

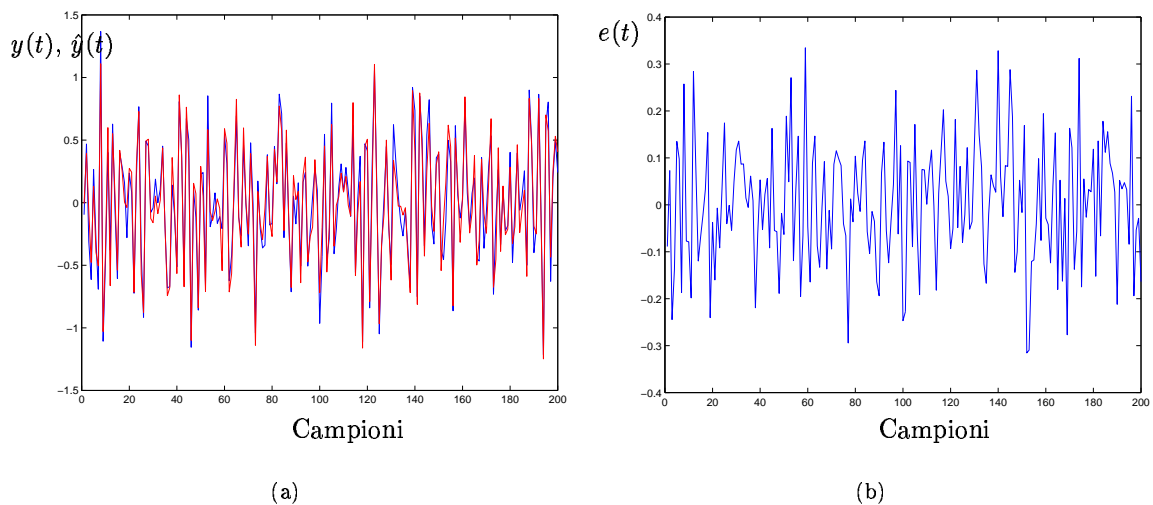


Figura 6.10: Uscita misurata e ricostruita (a) ed errore di ricostruzione (b).