

Tecniche di Controllo e Diagnosi

Progetto d'Esame

Doppio Serbatoio

Modellazione Matematica (1)

Si consideri il sistema schematizzato in Figura 1.1 costituito da due serbatoi cilindrici, collegati in serie tramite una tubazione di sezione costante e disposti ad altezze differenti, in modo tale che il fluido possa scorrere per effetto della forza di gravità solamente dal primo verso il secondo serbatoio. Sempre per effetto della forza di gravità, il fluido viene fatto fuoriuscire in modo libero dal secondo serbatoio, mentre il fluido in ingresso al primo serbatoio è regolato tramite una valvola proporzionale. Pertanto, la portata di liquido immessa tramite tale valvola può essere considerata come l'ingresso di controllo del sistema, mentre i livelli di riempimento dei due serbatoi costituiranno le variabili di stato, precisamente misurabili con comuni sensori specifici.

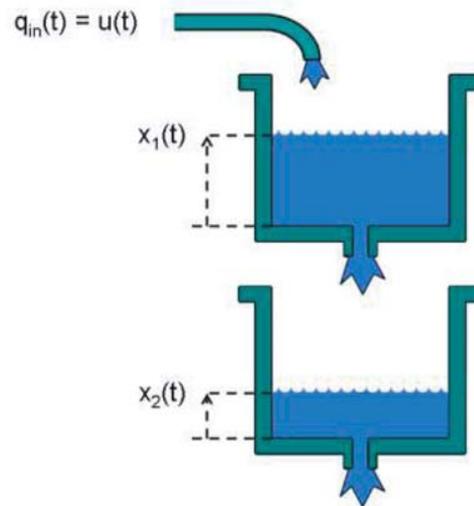


Figura 1.1: Schema del sistema con doppio serbatoio in cascata

Modellazione Matematica (2)

Il modello matematico del sistema può essere determinato considerando l'equilibrio delle masse (o meglio, dei volumi, se si elimina la dipendenza dalla densità del fluido, ipotizzandola costante) entranti ed uscenti in ciascun serbatoio, la cui differenza costituisce la variazione di massa (volume) contenuta nel serbatoio considerato. Se la forma del serbatoio è perfettamente cilindrica, allora la variazione di massa (volume) corrisponde, a meno della costante definita dall'area della sezione del cilindro, al livello del liquido.

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dL_1}{dt} &= Q_{i1} - Q_{o1/i2} \\ A_2 \frac{dL_2}{dt} &= Q_{o1/i2} - Q_{o2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

nella quale A_1 e A_2 sono le sezioni orizzontali dei due serbatoi, A_1 e A_2 i due livelli e Q_{i1} , $Q_{o1/i2}$ e Q_{o2} sono rispettivamente le portata volumetrica entrante nel primo serbatoio, quella uscente dal primo (ed entrante nel secondo) e quella uscente dal secondo.

Modellazione Matematica (3)

Per quanto riguarda Q_{i1} , è immediato imporla come ingresso u del sistema. Per definire l'espressione matematica che caratterizza le altre due, invece, è possibile fare riferimento alla cosiddetta *legge di Torricelli*, applicabile ai fluidi in uscita per “caduta libera” da aperture in un serbatoio. Questa legge, caso particolare dell'equazione elaborata da Evangelista Torricelli nel 1643 per calcolare la velocità finale di una massa in movimento, in questo caso sottoposta appunto all'effetto della forza di gravità, afferma che velocità di un fluido in uscita da un foro (di sezione molto piccola rispetto alle dimensioni del recipiente) è pari alla radice quadrata del doppio prodotto dell'accelerazione di gravità e della distanza fra il pelo libero del fluido e il centro del foro che stato praticato. In altre parole, nell'ipotesi che il foro (di sezione a) sia sul fondo del recipiente e che il livello di liquido in tale recipiente sia L , la portata volumetrica in uscita dal foro è:

$$Q_o = a \sqrt{2 g L}$$

Modellazione Matematica (4)

Applicando questa legge alle $Q_{o1/i2}$ e Q_{o2} della (1.1) e sostituendo le scelte intuitive di variabili di stato, ingresso e uscita $x_1 = L_1$, $x_2 = L_2$, $y = x_2$ e $u = Q_{i1}$, si ottiene il seguente modello nonlineare nello spazio degli stati, affine nel controllo e SISO:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{u}{A_1} - \frac{a_1\sqrt{2gx_1}}{A_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{a_1\sqrt{2gx_1}}{A_1} - \frac{a_2\sqrt{2gx_2}}{A_2}\end{aligned}\tag{1.2}$$

del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T = [L_1 \quad L_2]^T$ e

Modellazione Matematica (5)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\text{con } \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T = [L_1 \quad L_2]^T \text{ e}$$

$$\mathbf{f} = \left[-\frac{a_1\sqrt{2gx_1}}{A_1} \quad \frac{a_1\sqrt{2gx_1}}{A_1} \quad -\frac{a_2\sqrt{2gx_2}}{A_2} \right]^T$$

$$\mathbf{b} = \left[\frac{1}{A_1} \quad 0 \right]^T$$

$$h = x_2$$

Analisi dell'Equilibrio

Gli stati di equilibrio del sistema possono essere caratterizzati in funzione del livello desiderato per il secondo serbatoio, per il quale è generalmente di interesse definire un valore desiderato (*set-point*) x_{2d} . Si può infatti facilmente verificare che la famiglia di punti che soddisfa la condizione di equilibrio del sistema è del tipo:

$$\mathbf{x}_e = \left[\begin{array}{c} \frac{a_2^2 A_1^2 x_{2d}}{a_1^2 A_2^2} \\ x_{2d} \end{array} \right]^T$$

vale a dire che una volta fissato il livello desiderato del secondo serbatoio, il livello nel primo è determinato di conseguenza. Inoltre, è immediato verificare che in tale punto di equilibrio la portata volumetrica richiesta in ingresso è:

$$u_e = \frac{a_2 A_1 \sqrt{2 g x_{2d}}}{A_2}$$

Analisi dell'Equilibrio (2)

In questa famiglia di punti di equilibrio, il calcolo della linearizzazione approssimata permette di ottenere le seguenti matrici (dipendenti solo da x_{2d}):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{g a_1}{A_1 \sqrt{\frac{2 g x_{2d} a_2^2 A_1^2}{a_1^2 A_2^2}}} & 0 \\ \frac{g a_1}{A_1 \sqrt{\frac{2 g x_{2d} a_2^2 A_1^2}{a_1^2 A_2^2}}} & -\frac{g a_2}{A_2 \sqrt{2 g x_{2d}}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti inoltre che qualora sia necessario calcolare l'approssimazione lineare del sistema in una condizione di funzionamento non necessariamente di equilibrio la matrice \mathbf{A} più generica diventa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{g a_1}{A_1 \sqrt{2 g x_{1d}}} & 0 \\ \frac{g a_1}{A_1 \sqrt{2 g x_{1d}}} & -\frac{g a_2}{A_2 \sqrt{2 g x_{2d}}} \end{pmatrix}$$

mentre la matrice \mathbf{B} ovviamente non cambia.

Feedback Linearization

Si può dimostrare con alcuni passaggi che il sistema ha grado relativo pari a 2, pertanto la feedback linearization ingresso-uscita porta anche ad una linearizzazione completa ingresso-stato. Ponendo come nuove variabili di stato

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2]^T = \left[x_2 - x_{2d} \quad \frac{a_1 \sqrt{2 g x_1}}{A_1} - \frac{a_2 \sqrt{2 g x_2}}{A_2} \right]^T$$

e come uscita $y = z_1$ il sistema è riconducibile ad una forma canonica la cui ultima “riga” è:

$$\dot{z}_2 = \ddot{y} = f_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})u$$

nella quale:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{g a_1^2}{A_1^2} - \frac{g a_2 \left(\frac{a_1 \sqrt{2 g x_1}}{A_1} - \frac{a_2 \sqrt{2 g x_2}}{A_2} \right)}{A_2 \sqrt{2 g x_2}} \\ b_1 &= \frac{g a_1}{A_1^2 \sqrt{2 g x_1}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Feedback Linearization (2)

che può essere trasformata in $\ddot{y} = v$ tramite la legge di controllo $u = b_1^{-1}(v - f_1)$, cioè:

$$u = \frac{A_1^2 \sqrt{2 g x_1}}{g a_1} \left(v + \frac{g a_1^2}{A_1^2} + \frac{g a_2 \left(\frac{a_1 \sqrt{2 g x_1}}{A_1} - \frac{a_2 \sqrt{2 g x_2}}{A_2} \right)}{A_2 \sqrt{2 g x_2}} \right)$$

o anche in forma più compatta:

$$u = \frac{v A_1^2 \sqrt{2 g x_1}}{g a_1} + a_1 \sqrt{2 g x_1} - \frac{a_2^2 A_1^2 \sqrt{2 g x_1}}{a_1 A_2^2} + \frac{a_2 A_1 x_1 \sqrt{2 g x_2}}{A_2 x_2}$$

Si noti che imporre una condizione di regime $y = 0$, che corrisponde anche a portare nell'origine il vettore di stato \mathbf{z} , equivale a portare il sistema originario nella condizione di equilibrio imposta dal set-point x_{2d} .

Compiti del Progetto

1. **Controllo LQ:** realizzare simulazioni in ambiente Matlab/Simulink del sistema considerato con controllo di tipo LQ, progettato per l'approssimazione lineare definita da x_{2d} e con matrice di penalizzazione dello stato Q (2×2), scalare di penalizzazione dell'ingresso R e matrice di penalizzazione stato-ingresso N (2×1) a piacere. Verificare inoltre l'effetto di variazioni di tali matrici sulle prestazioni del controllore.

N.B.: si ricordi che essendo $u_e \neq 0$ nel punto di equilibrio, lo schema di controllo da implementare è quello della slide 6 nelle "Note Applicative" presentate a lezione.

Compiti del Progetto (2)

2. **Controllo con Feedback Linearization:** implementare la legge di controllo linearizzante descritta alla sezione 1.3 e sfruttare l'ingresso fittizio v per realizzare un ulteriore anello di controllo per la regolazione in $y = 0$, utilizzando un semplice controllore lineare oppure un controllore Sliding Mode.

N.B.: si ricordi che $\ddot{y} = v$, pertanto una superficie di sliding idonea può essere:

$$S = \dot{y} + \lambda y$$

in base alla quale la legge di controllo per l'ingresso fittizio v sarà del tipo:

$$v = (\ddot{y}_d) - \lambda \dot{y} - K \text{sign}(s)$$

Compiti del Progetto (3)

3. **Controllo con Reti Neurali:** una volta ottenute buone prestazioni per almeno uno dei due controllori richiesti ai punti precedenti, effettuare il training di una Rete Neurale con il metodo del Supervised Learning, acquisendo dati di training con uno dei due modelli ottenuti in precedenza al quale sia applicata una sollecitazione casuale sul set-point. Verificare l'effetto di modifiche al numero di neuroni della rete o ai dati di training sulle prestazioni del controllore.

N.B.: è suggeribile utilizzare come ingressi della rete sia i valori di set-point degli stati (x_{1d} e x_{2d} , ricordando sempre che quest'ultimo determina il valore del primo) che quelli attuali (totale: 4 input).

Compiti del Progetto (4)

4. **Controllo con Logica Fuzzy:** una possibile strategia di progetto per un controllore fuzzy potrebbe essere quella dell'identificazione della funzione del regolatore fuzzy usando il Toolbox ANFIS, che prevede di sfruttare i dati delle tecniche di progetto per controllori lineari (ad esempio LQR) per stimare i parametri del regolatore stesso validi per il controllo del sistema non lineare con diversi valori di x_{2d} (e quindi x_{1d}). Questi parametri possono essere combinati in un sistema fuzzy di tipo Sugeno, con regole determinate in maniera automatica dal Toolbox di ANFIS e funzioni di output (conseguenti) che dipendono dagli ingressi del regolatore.

Pertanto, per implementare la soluzione, sarà necessario che il sistema Fuzzy abbia come ingressi tutti gli elementi di \mathbf{x}_d e di \mathbf{x} e che i parametri $a, b \dots$ siano determinati in maniera automatica da ANFIS.

Compiti del Progetto (5)

5. **ESPERIMENTI COMPARATIVI:** verificare le prestazioni e la robustezza di tutti i sistemi di controllo progettati, rispetto a variazioni del 10 % sul set-point, applicando un'onda quadra additiva al set-point originario (con frequenza da fissare in funzione del tempo di assestamento tipico del sistema, in modo da permettere al sistema di riportarsi sempre sul set-point), e sui parametri del modello.

Compiti del Progetto (6)

6. **Progetto dello Schema di Diagnosi:** una volta che si siano verificate le condizioni di controllabilità e osservabilità per il sistema linearizzato, si progettano il filtro di Kalman che stimi le variabili di stato del sistema non lineare.

Alle misure dell'ingresso e dello stato si sovrappongono opportuni segnali con distribuzione probabilistica di tipo gaussiano, a valore medio nullo, incorrelati, e deviazione standard sufficientemente piccola (1%, 0.1%) rispetto al valore medio dei rispettivi segnali misurati. Verificare infine che guasti additivi di tipo a gradino possono essere rilevati e isolati sulla base dell'analisi dei residui, una volta fissate in maniera empirica opportune soglie in condizioni di assenza di guasto.